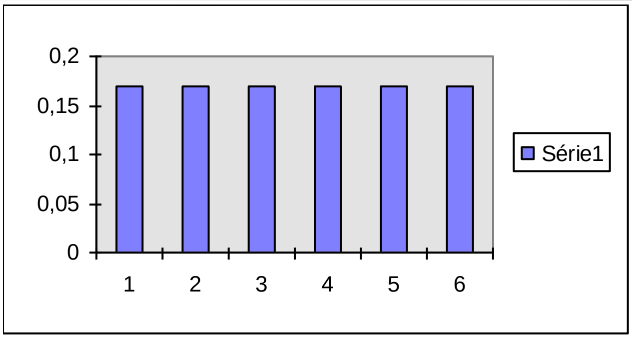
Le théorème de la limite centrée facultatif

On lance un dé normal.
On s'intéresse à la variable aléatoire égale au numéro sorti.
La loi de probabilité de cette variable aléatoire est donnée par

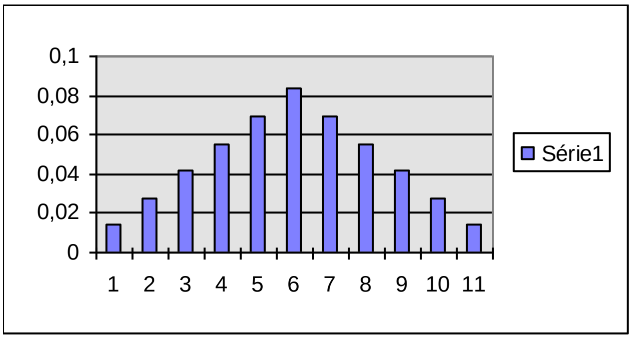
n	1	2	3	4	5	6
P ($X = n$)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



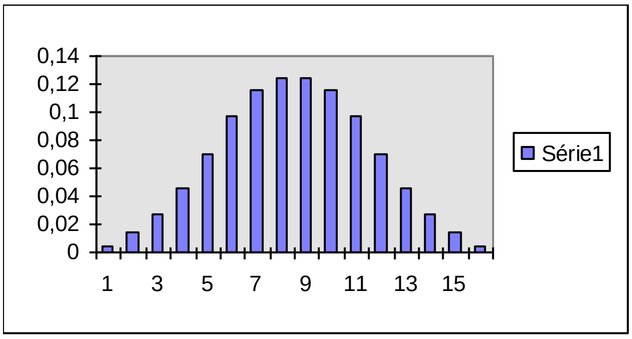
On lance 2 dés normaux.
La variable aléatoire égale au numéro donné par le premier dé est X_1.
La variable aléatoire égale au numéro donné par le deuxième dé est X_2.
Ces 2 variables aléatoires sont <u>indépendantes</u>.
On s'intéresse à la moyenne des numéros donnés par les 2 dés.
On obtient ainsi une nouvelle variable aléatoire. On dit que cette nouvelle variable aléatoire X est la moyenne des n variables aléatoires X_1 et X_2.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est donnée par

n	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
P ($X = n$)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Avec 3 dés on trouve ceci



Quand le nombre de dés augmente, les trois graphiques indiquent

- que l'espérance ne change pas
- que la dispersion diminue
- qu'on se rapproche d'une courbe en cloche (d'une loi normale).

L'espérance ne change pas car on trouve 3,5 dans les trois cas.
La dispersion diminue car les valeurs éloignées de l'espérance deviennent plus rares.

Cela permet d'estimer que

Théorème de la limite centrée
Si les X_i sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité d'espérance μ et d'écart-type est σ,
alors, pour n suffisamment grand ($n \geq 30$), la moyenne de ces variables aléatoires suit approximativement la loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Application à un sondage
La taille des adultes d'une ville suit une loi normale T de moyenne 1,75 m et d'écart-type 0,15 m.
On fait un sondage de taille 100 à propos de la taille des adultes de cette ville.
La taille du premier sondé suit une loi normale T_1 de moyenne 1,75 et d'écart-type 0,15.
La taille du deuxième sondé suit une loi normale T_2 de moyenne 1,75 et d'écart-type 0,15.
etc.

Ces variables aléatoires sont indépendantes donc la taille moyenne des 100 sondés suit approximativement une loi normale $\overline{T}$ de moyenne 1,75 m et d'écart-type $\dfrac{0,15}{\sqrt{100}} = \dfrac{0,15}{10} = 0,015$ m.