Les nombres complexes

Opérations sur les nombres complexes

<u>Définition</u>: i est un nombre dont le carré est - 1.
i n'est pas un nombre réel.
i est un nombre complexe.
En multipliant i par un nombre réel, on obtient un autre nombre complexe
Exemples: $2\,i$ ou $-5\,i$ etc.
En ajoutant un nombre réel et un nombre complexe, un obtient un nombre complexe.
Exemples: $7 + 3\,i$ ou $-2 + 8\,i$ ou $\frac{7}{5} - \frac{1}{2}\,i$ etc.
Dans l'écriture $a + b\,i$, on obtient un nombre complexe en remplaçant a et b par n'importe quel nombre réel.
Le nombre réel a est la <u>partie réelle</u> du nombre complexe $a + b\,i$.
Le nombre réel b est la <u>partie imaginaire</u> du nombre complexe $a + b\,i$.

<u>Définition</u>: l'ensemble des nombres complexe est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $a + b\,i$.
<u>Propriété</u>: pour tout nombre complexe z, il existe un seul réel a et un seul réel b
tels que $z = a + b\,i$.
En remplaçant a par 0 et b par 1, on trouve $z = i$ car $0 + 1\,i = i$.
Le nombre 6 est un réel. C'est aussi un complexe car $6 = 6 + 0\,i$.
Tous les nombre réels sont aussi des nombres complexes.

Propriétés: les nombres complexes s'ajoutent, se soustraient, se multiplient et se divisent comme les nombres réels.
Exemples: $4 + 3\,i + 5 - 2\,i = 4 + 5 + 3\,i - 2\,i = 9 + i$.

$$2 \times (4 + 3\,i) = 2 \times 4 + 2 \times 3\,i$$
$$= 8 - 6\,i$$

$$i \times (4 + 3\,i) = 4 \times i + 3 \times i^2$$
$$= -3 + 4\,i \quad \text{car le carré de } i \text{ est } -1$$

$$(4 + 3\,i) \times (5 - 2\,i) = 4 \times 5 + 4 \times (-2\,i) + 3\,i \times 5 + (3\,i) \times (-2 \times i)$$
$$= 20 - 8\,i + 15\,i - 6\,i^2$$
$$= 20 + 7\,i + 6 \quad \text{on a dit que le carré de } i \text{ est } -1$$
$$= 26 + 7\,i.$$

$$(5 + 2\,i) \times (5 - 2\,i) = 5 \times 5 + 5 \times (-2\,i) + 2\,i \times 5 + (2\,i) \times (-2 \times i)$$
$$= 25 - 10\,i + 10\,i - 4\,i^2$$
$$= 25 + 4$$
$$= 29$$

On dit que les nombres $5 + 2\,i$ et $5 - 2\,i$ sont des <u>nombres conjugués</u>.
Le conjugué de $a + b\,i$ est $a - b\,i$.

$$(a + b\,i) \times (a - b\,i) = a^2 + a \times (-b\,i) + b\,i \times a + (b\,i) \times (-b \times i)$$
$$= a^2 - a\,b\,i + a\,b\,i - b^2 \times i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

On ne change pas une fraction, en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

Par exemple, $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 2}{8 \times 2} = \frac{6}{16}$

Autre exemple: $2 = \frac{7 \times 2}{7} = \frac{14}{7}$

Cela permet de trouver <u>l'inverse d'un nombre complexe</u>:

$$\frac{1}{5+2.i} = \frac{5-2.i}{(5+2.i)\times(5-2.i)} = \frac{5-2.i}{5^2+2^2} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}\,i$$

$$\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)\times(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\,i$$

Pour trouver le quotient de deux nombres complexes, on utilise la même astuce.
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur:

$$\frac{-4+5.i}{3-2.i} = \frac{(-4+5.i)\times(3+2.i)}{(3-2.i)\times(3+2.i)} = \frac{-12-8.i+15.i-10}{9^2+2^2} = \frac{-22+7.i}{85} = -\frac{22}{85} + \frac{7}{85}\,i$$

Représentation géométrique d'un nombre complexe

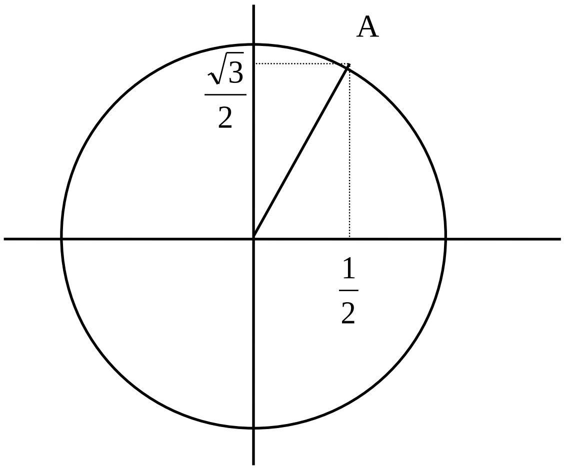
Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$),
au complexe $z = a + b\,i$ on associe le point de coordonnées (a ; b).
Au complexe $6 - 5\,i$ on associe le point A (6 ; - 5).
On dit que $6 - 5\,i$ est <u>l'affixe</u> du point A (6 ; - 5).
On dit que A (6 ; - 5) est <u>l'image</u> du complexe $6 - 5\,i$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Choisissons un point du cercle trigonométrique, par exemple A $(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

donc A $(\cos\frac{\pi}{3}\ ;\ \sin\frac{\pi}{3})$.



On dit que $\frac{\pi}{3}$ est l'argument du complexe z_1.

A est l'image du complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On peut aussi écrire que $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Ce nombre complexe peut donc s'écrire de deux façons :

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est la forme algébrique de z.

$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, c'est la forme trigonométrique de z.

Si on remplace $\frac{\pi}{3}$ par n'importe quel autre angle, cela marche de la même façon :

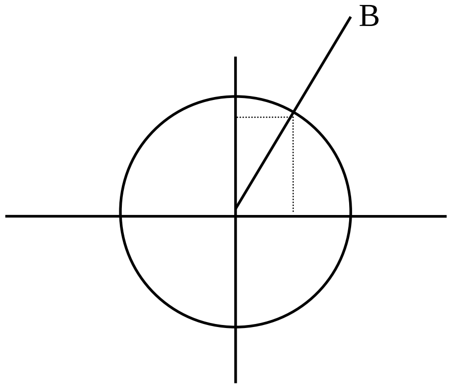
Propriété : si z est le complexe de module 1 et d'argument θ,
alors $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Choisissons un complexe de module différent de 1.

Soit z_2 le complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

$z_2 = 2z_1$ donc $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

L'image de z_2 est B (1 ; $\sqrt{3}$).



Propriété : si z est le complexe d'argument θ,
alors $z = | z | (\cos \theta + i \sin \theta)$.
C'est la forme trigonométrique du complexe z.

Exercice : soit z le complexe de module 3 et d'argument $\frac{5\pi}{6}$.
Donner la forme algébrique de z.

$$z = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i.$$

Exercice : soit z le complexe de module $\frac{1}{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.
Donner la forme algébrique de z.

$$z = \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} i.$$

Exercice : soit $z = 2\sqrt{3} + 2i$.
Donner la forme trigonométrique de z.
Cherchons le module de z.
$| z |^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 4 \times 3 + 4 = 16$
donc $| z | = 4$
donc $z = 4 (\cos \theta + i \sin \theta)$ où θ est l'argument de z.
Pour trouver $\cos \theta + i \sin \theta$, il suffit de diviser l'écriture précédente par 4.

$$\frac{z}{4} = \cos \theta + i \sin \theta = \frac{1}{4} (2\sqrt{3} + 2i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

donc $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Finalement, $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

Exercice : soit $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{6} - i\,\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Donner la forme trigonométrique de z.

Cherchons le module de z.

$|\,z\,|^2 = \dfrac{2}{36} + \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{9}$

donc $|\,z\,| = \dfrac{1}{3}$.

donc $z = \dfrac{1}{3}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ où θ est l'argument de z.

Pour trouver $\cos\theta + i\sin\theta$, il suffit de multiplier l'écriture précédente par 3.

$3\,z = \cos\theta + i\sin\theta = 3\,\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{6} - i\,\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

donc $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$.

Finalement, $z = \dfrac{1}{3}\,\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

<u>Exercices</u>

N° 39 à 44 page 169.