

Un exercice d'annales sur les équations différentielles

Exercice 2 de https://www.apmep.fr/IMG/pdf/STL_Bio_Metropole_16_juin_2016.pdf

1. a.

$$y' + 0,162 y = 20,3$$

La solution générale de l'équation sans second membre $y' + 0,162 y = 0$ est $y = \lambda e^{-0,162 t}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre $y' + 0,162 y = 20,3$.

Si y est une fonction constante solution de l'équation avec second membre,

$$\text{alors } y' = 0 \text{ et } 0,162 y = 20,3 \text{ donc } y = \frac{20,3}{0,162} = 125,3.$$

$$y = \frac{20,3}{0,162} = 125,3 \text{ est une solution de l'équation avec second membre.}$$

Finalement la solution générale de l'équation avec second membre $y' + 0,162 y = 20,3$

est $y = \lambda e^{-0,162 t} + 125,3$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

1. b.

f est une solution de l'équation (E) donc $f(t) = \lambda e^{-0,162 t} + 125,3$.

$$f(0) = 21 \text{ donc } \lambda + 125,3 = 21 \text{ donc } \lambda = -104,3 \text{ donc } f(t) = -104,3 e^{-0,162 t} + 125,3.$$

Il est prudent de vérifier sur la calculatrice qu'on obtient bien la courbe donnée en annexe.

2. a.

$$g(t) = 125 - 104 e^{-0,16 t}.$$

$$g'(t) = -0,16 \times (-104 e^{-0,16 t}) = 16,64 e^{-0,16 t}$$

donc $g'(t) > 0$ ($16,64 > 0$ et $e^{-0,16 t} > 0$) car donc g est croissante.

2. b.

t	0	60
$g(t)$	21	125,29

3. a.

Le graphique ne permet pas de donner une précision au degré près.

Il faut donc faire le calcul : $f(9) = 101\text{ °C}$.

3. b.

On lit sur la courbe que $f(19) \approx 120$. On pourra donc arrêter l'autoclave après 22 minutes de fonctionnement.

3. c.

$$f(19) > 120 \Leftrightarrow 125 - 104 e^{-0,16t} > 120$$

$$\Leftrightarrow -104 e^{-0,16t} > -5$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,16t} < \frac{5}{104}$$

$$\Leftrightarrow -0,16t < \ln \frac{5}{104}$$

$$\Leftrightarrow t > -\frac{1}{0,16} \ln \frac{5}{104}$$

$$\Leftrightarrow t > 18,97$$

$$\Leftrightarrow t > 18\text{min } 59\text{ sec.}$$

On pourra donc arrêter l'autoclave après 21 minutes et 59 secondes de fonctionnement.