

Correction du travail pour le 11 mai

Équations du premier ordre sans second membre

Résoudre $y' - 5y = 0$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{5x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il n'y a pas un mot à ajouter. C'est l'application directe d'un résultat du cours.

Résoudre $5y' + 20y = 0$

$$5y' + 20y = 0 \Leftrightarrow y' + 4y = 0$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-4x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' = 3y$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-3x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' = 0$

Les solutions sont les fonctions constantes.

On peut aussi utiliser la formule et écrire :

les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{0x} = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

C'est la même chose.

Équations du premier ordre avec second membre

Résoudre $y' - 5y = 10$

L'équation sans second membre est $y' - 5y = 0$.

Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{5x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'équation avec second membre est $y' - 5y = 10$.

Une solution de l'équation avec second membre est $x \mapsto -2$.

Finalement,

les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{5x} - 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : on écrit souvent « la solution générale de l'équation sans second membre est $y = \lambda e^{5x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ ».

Remarque : on écrit souvent « une solution particulière de l'équation sans second membre est $y = -2$ ».

Remarque : Pour trouver cette solution $y = -2$, on cherche une solution de l'équation $y' - 5y = 0$ qui soit une fonction constante. Dans ce cas, $y' = 0$ et il reste $-5y = 0$ donc $y = -2$.

Résoudre $5y' + 20y = 100$.

$$5y' + 20y = 100 \Leftrightarrow y' + 4y = 20.$$

C'est cette équation qu'on va résoudre.

L'équation sans second membre est $y' + 4y = 0$.

Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-4x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'équation avec second membre est $y' + 4y = 20$.

Une solution de l'équation avec second membre est $x \mapsto 6$.

Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont

les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-4x} + 6$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Équations du deuxième ordre sans second membre

Résoudre $y'' + 9y = 0$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto A \cos 3x + B \sin 3x$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Il n'y a pas un mot à ajouter. C'est l'application directe d'un résultat du cours.

Résoudre $5y'' + 10y = 0$

$$5y'' + 10y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Équations du deuxième ordre avec second membre

Résoudre $y'' + 9y = 9$

L'équation sans second membre est $y'' + 9y = 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre est $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

L'équation avec second membre est $y'' + 9y = 9$.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est $y = 1$.

Finalement,

La solution générale de l'équation $y'' + 9y = 9$ est $y = 1 + A \cos 3x + B \sin 3x$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Résoudre $5y'' + 10y = 40$

$$5y'' + 10y = 40 \Leftrightarrow y'' + 2y = 8$$

L'équation sans second membre est $y'' + 2y = 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre est $y = A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

L'équation avec second membre est $y'' + 2y = 8$.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est $y = 4$.

Finalement,

La solution générale de l'équation $y'' + 2y = 8$ est $y = 4 + A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.