

Correction du travail pour le 7 mai

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Centres_etrangers_13_juin_2019_DV.pdf

A1

$$37 + 3 = 40$$

A2

$$20x + 19y = 40$$

$$(2; 0) \in S$$

Soit $(x; y)$ une solution de l'équation $20x + 19y = 40$.

$$20x + 19y = 40$$

$$\text{donc } 20x + 19y = 20 \times 2 + 19 \times 0$$

$$\text{donc } 20(x - 2) = -19 \times y$$

D'une part $20 \mid 19 \times y$, d'autre part 20 et 19 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss, $20 \mid y$

donc il existe un entier k tel que $y = 20k$

$$\text{donc } 20(x - 2) = -19 \times 20k$$

$$\text{donc } 20x + 19 \times 20k = 40$$

$$\text{donc } x + 19k = 2$$

$$\text{donc } x = -19k + 2 \quad S = \{ (-19k + 2; 20k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

Remarque 1 : vous pouvez démontrer la réciproque, comme on l'a déjà fait.

Remarque 2 : il est prudent de vérifier sur quelques exemples :

$$\text{pour } k = 0, 20 \times (-19k + 2) + 19 \times 20k = 20 \times (0 + 2) + 19 \times 0 = 40;$$

$$\text{pour } k = 5, 20 \times (-19 \times 5 + 2) + 19 \times 20 \times 5 = 20 \times (-95 + 2) + 1900 = 40 \text{ etc.}$$

Un tableau de valeurs sur calculette fait ça très bien.

A3a

$$40 = 2^3 \times 5$$

A3b

$(x + y) - (x - y) = 2y$ qui est un nombre pair donc $x + y$ et $x - y$ ont la même parité.

A3c

$$x^2 - y^2 = 40 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 40$$

$x + y$ et $x - y$ ont la même parité.

Si $x + y$ et $x - y$ sont tous les deux impairs, alors le produit $(x + y)(x - y)$ est impair, ce qui n'est pas le cas car $(x + y)(x - y) = 40$

donc $x + y$ et $x - y$ sont tous les deux pairs.

$(x + y)(x - y) = 40$ est donc une décomposition de 40 en produit de deux nombres pairs.

Il n'y a que deux décompositions de 40 en produit de deux nombres pairs : $40 = 20 \times 2$ et $40 = 10 \times 4$ (on le vérifie facilement avec $40 = 2^3 \times 5$).

x et y sont naturels donc $x + y \geq x - y$ donc il n'y a que deux solutions.

$$x + y = 20 \text{ et } x - y = 2 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11 \text{ et } y = 9$$

$$x + y = 10 \text{ et } x - y = 4 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \text{ et } y = 3$$

$$S = \{ (11; 9); (7; 3) \}$$

B1a

$$13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \text{ donc } 40 = 27 + 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \text{ donc } 40 = 3^3 + 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3.$$

B1b

$$6n = (n + 1)^3 + (n - 1)^3 - n^3 - n^3$$

$$\text{donc } 6 \times 8 = (8 + 1)^3 + (8 - 1)^3 - 8^3 - 8^3$$

$$\text{donc } 48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$$

$$\text{donc } 40 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 8$$

$$\text{donc } 40 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 2^3$$

B2a

$$40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$$

Reste de la division par 9

de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
de n^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8	0

B2b

On en déduit que pour tout entier naturel n , $n^3 \equiv -1 [9]$ ou $n^3 \equiv 0 [9]$ ou $n^3 \equiv 1 [9]$.

Soient a, b et c trois entiers naturels tels que $a^3 \equiv p [9]$; $b^3 \equiv q [9]$ et $c^3 \equiv r [9]$.

p, q et r sont égaux à -1 ou 0 ou 1 donc $-3 \leq p + q + r \leq 3$.

Si $40 = a^3 + b^3 + c^3$,

alors $40 \equiv p + q + r [9]$,

alors $p + q + r = 4$ car $40 \equiv 4 [9]$.

Cela contredit $-3 \leq p + q + r \leq 3$.

Finalement, 40 ne peut pas s'écrire sous la forme $40 = a^3 + b^3 + c^3$.