Correction du travail pour le 16 avril

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/BTS_gr-_D_metropole_13_mai_2015.pdf

Exercice 1

Partie A

1. Résoudre sur $[\, 0\,;\, +\infty\, [$ $\quad y' + 0{,}1\, y = 2\, e^{-0{,}1\, t}$.

1. a. Les solutions de l'équation sans second membre $y' + 0{,}1\, y = 0$ sont $t : \longmapsto \lambda\, e^{-0{,}1\, t}$ $\;(\lambda \in \mathrm{IR})$.

1. b. $h(t) = 2\, t\, e^{-0{,}1\, t}$ donc $h'(t) = 2\, e^{-0{,}1\, t} - 0{,}2\, t\, e^{-0{,}1\, t}$

donc $h'(t) + 0{,}1\, h(t) = 2\, e^{-0{,}1\, t} - 0{,}2\, t\, e^{-0{,}1\, t} + 0{,}2\, e^{-0{,}1\, t} = 2\, e^{-0{,}1\, t}$

donc h est solution de l'équation avec second membre $y' + 0{,}1\, y = 2\, e^{-0{,}1\, t}$.

1. c. donc les solutions de l'équation avec second membre $y' + 0{,}1\, y = 2\, e^{-0{,}1\, t}$

sont $t : \longmapsto \lambda\, e^{-0{,}1\, t} + 2\, t\, e^{-0{,}1\, t}$ $\;(\lambda \in \mathrm{IR})$.

On peut aussi écrire :

La solution générale de l'équation sans second membre $y' + 0{,}1\, y = 0$

est $y = \lambda\, e^{-0{,}1\, t}$ $\;(\lambda \in \mathrm{IR})$.

Une solution générale de l'équation avec second membre $y' + 0{,}1\, y = 2\, e^{-0{,}1\, t}$ est $y = 2\, t\, e^{-0{,}1\, t}$.

Donc la solution générale de l'équation avec second membre $y' + 0{,}1\, y = 2\, e^{-0{,}1\, t}$

est $t : \longmapsto \lambda\, e^{-0{,}1\, t} + 2\, t\, e^{-0{,}1\, t}$ $\;(\lambda \in \mathrm{IR})$.

1. d. À $t = 0$ la quantité de principe actif dans le sang est 1 mg donc $y(0) = 1$

donc $\lambda\, e^{-0} + 2\, t\, e^{-0} = 1$ donc $\lambda = 1$.

donc la solution de (E) correspondant au problème posé est $t : \longmapsto e^{-0{,}1\, t} + 2\, t\, e^{-0{,}1\, t} = (2\, t + 1)\, e^{-0{,}1\, t}$.

2. Étude d'une fonction

$f(t) = (2\, t + 1)\, e^{-0{,}1\, t}$.

2. a. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ donc l'axe $(O\, x)$ est asymptote à la représentation de f.

2. b. $f'(t) = (1{,}9 - 0{,}2\, t)\, e^{-0{,}1\, t}$.

Comme $e^{-0{,}1\, t} > 0$ pour tout t, le signe de $f'(t)$ est le signe de $(1{,}9 - 0{,}2\, t)$ donc le signe et les variations de $f'(t)$ est donné par ce tableau :

t		9,5	
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	1 ↗	7,73	↘ 0

3. Application

3. a. La quantité de principe actif dans le sang sera maximale 9 heures et demi après le début de l'expérience.

3. b. Le médicament est actif lorsque la quantité de principe actif dans le sang est supérieure à 5 mg.

Le tableau de variations indique que cela se produit sur un intervalle [a ; b] où $a < 9{,}5$ et $b > 9{,}5$.

On ne sait pas résoudre $(2t + 1)e^{-0{,}1t} > 5$ donc on utilise la calculette et on trouve que $a \approx 2{,}81$ et $b \approx 21{,}95$.

Le médicament est actif entre 2 h 49 minutes et 21 h 57 minutes.

3. c. Pour trouver la quantité moyenne demandée, on divise l'intégrale par 24.

On trouve 6,1 mg.

Partie B

1. La courbe qui représente le mieux cette évolution est la troisième car on voit une succession d'augmentations dues aux injections, suivie de diminutions dues à l'élimination.

2. a. i. On trouve 3,53 ; 3,28 ; 3,02 ; 2,76 ; 2,51 ; 2,22 et 1,99.

2. a. ii. On trouve $y = at + b$ avec $a = -0{,}06$ et $b = 3{,}54$.

2. b. On peut aussi écrire $y = at + b$ donc $\ln(36 - q) = at + b$

donc $36 - q = e^{at+b} = e^{-0{,}06t + 3{,}54} = e^{3{,}54} \times e^{-0{,}06t} = 34{,}47 \times e^{-0{,}06t}$

donc $q = 36 - 34{,}47 \times e^{-0{,}06t}$.

2. c. Il faut que $36 - q \geq 35 \Leftrightarrow 36 - 34{,}47 \times e^{-0{,}06t} \geq 35 \Leftrightarrow 34{,}47 \times e^{-0{,}06t} \geq 1 \Leftrightarrow 34{,}47 \times e^{-0{,}06t} \geq 1 \Leftrightarrow$

$$e^{-0{,}06t} \geq \frac{1}{34{,}47} \Leftrightarrow -0{,}06t \geq \ln\frac{1}{34{,}47} \Leftrightarrow t \leq -\frac{1}{0{,}06}\ln\frac{1}{34{,}47} \Leftrightarrow t \leq 59 \text{ heures.}$$

L'état stationnaire sera donc atteint en moins de trois jours.