Un test unilatéral d'hypothèse, métropole 2001

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/LeBTSgrD.pdf

Partie B corrigée

Un magicien affirme qu'il peut souvent deviner la couleur d'une carte (rouge ou noir).
p est la probabilité que le magicien devine la couleur d'une carte.
Si le magicien est un imposteur, alors $p = \frac{1}{2}$, sinon $p > \frac{1}{2}$.

Partie A Approximation par une loi normale

On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de succès lors de n tirages.
1. Dans cette question, $n = 20$.
a. Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.
b. Calculer P ($Y = 15$).
2. Dans cette question, $n = 100$. On admet que Y peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi normale.
a. Donner les paramètres de cette loi normale.
b. Utiliser cette approximation pour calculer P ($Y > 60$).

1. a. La loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{2}$.
b. P ($Y = 15$) = 0,015.
2. $E = n\,p = 50$ et $\sigma^2 = n\,p\,q = 25$ donc $\sigma = 5$.
a. Loi normale de paramètres 50 et 5.
b. P ($Y > 60$) = 0,023.

Partie B Test unilatéral

<u>Expliquons pourquoi on utilise un test unilatéral.</u>
On pense que le magicien est un imposteur et on veut tester cette hypothèse.

On fait deviner 100 cartes à quelqu'un qui répond au hasard. D est la variable aléatoire égale au nombre de cartes devinées.
Dans cette partie B, on démontrera que P ($D < 59$) = 0,95.
Voyons comment utiliser ce résultat.

Le magicien veut montrer qu'il fait mieux que quelqu'un qui répond au hasard.
- Pour convaincre, au niveau de confiance de 0,95, il devra donc deviner plus de 59 cartes.

- S'il devine entre 50 et 59 cartes, alors il ne montre pas qu'il fait mieux que le hasard et il sera considéré comme un imposteur.
- S'il devine moins de 50 cartes, alors non seulement il n'a pas de talent mais il n'a pas de chance. Il sera encore considéré comme un imposteur.

	50	59
Le magicien est considéré comme un <u>imposteur</u>.	Le magicien est considéré comme un <u>imposteur</u>.	Le magicien est considéré comme un <u>magicien</u>.

Le test unilatéral, c'est ça :

Hypothèse <u>acceptée</u>	Hypothèse <u>acceptée</u>	Hypothèse rejetée

Le test bilatéral, c'est ça :

Hypothèse rejetée	Hypothèse <u>acceptée</u>	Hypothèse rejetée

<u>Maintenant, rédigeons</u>

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout tirage de taille n, associe la fréquence des succès obtenus par le magicien lors de n tirages. On admet que F suit une loi normale de moyenne inconnue p et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

D'après un tirage de 100 cartes, on construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5 %, si le magicien est un imposteur.

On choisit comme hypothèse nulle H_0 : $p = \dfrac{1}{2}$, et comme hypothèse alternative H_1 : $p > \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que P ($F \leq \dfrac{1}{2} + h$) = 0,95.

> Sous l'hypothèse H_0, F suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
>
> On peut approcher cette loi binomiale par la loi normale de paramètres $m = \dfrac{1}{2}$
>
> et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{100}} = \sqrt{\dfrac{1}{4\times 100}} = \dfrac{1}{2\times 10} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.
>
> P ($F \leq \dfrac{1}{2} + h$) = 0,95 $\Leftrightarrow$ $h = 1{,}645\ \sigma$ $\Leftrightarrow$ $h = 1{,}645 \times 0{,}05 \approx 0{,}082$.

2. Énoncer la règle de décision du test.

On demande au magicien de deviner la couleur de 100 cartes, on calcule la fréquence de réussite f.
Si $f \in L = [\ 0\ ;\ 0{,}582\ ]$, alors on accepte H_0 et on peut considérer le magicien comme un imposteur.
Si $f \notin L = [0\ ;\ 0{,}582\ ]$, alors on rejette H_0.
Pratiquement, le magicien doit deviner au moins 59 cartes.

3. Le magicien a deviné 64 cartes sur les 100 tirées. Que va-t-on conclure ?
Au seuil de 95 %, on ne considérera pas le magicien comme un imposteur.