

Un exercice d'annale sur un test bilatéral

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque disque de la production associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ . Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm. Sinon, il est considéré comme défectueux.

1. On suppose que $\sigma = 0,04$. Calculer la probabilité qu'un disque pris au hasard dans la production soit défectueux, dans chacun des deux cas suivants.

a. $m = 25$ mm ; b. $m = 24,99$ mm

a. La calculette donne $P = 0,971$; b. $P = 0,976$.

2. On note $\bar{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 disques de la production associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. On admet que $\bar{X}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type 0,004.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production. On souhaite construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, pour savoir si l'on peut considérer, au risque de 5 %, que la moyenne m des disques est égale à 25.

a. Sous l'hypothèse nulle H_0 ($m = 25$) calculer la valeur du réel d tel que $P(|\bar{X} - 25| < d) = 0,95$.

Rappel sur la valeur absolue

$|\bar{X} - 25|$ est la distance entre 25 et $\bar{X}$.

$|\bar{X} - 25| < d$ signifie $-d < \bar{X} - 25 < d \Leftrightarrow 25 - d < \bar{X} < 25 + d$

et $P(|\bar{X} - 25| < d)$ signifie $P(25 - d < \bar{X} < 25 + d)$.

a. On sait que pour une loi normale $P(m - 1,96 \sigma < X < m + 1,96 \sigma) = 0,95$.

On sait que $\bar{X}$ suit une loi normale de moyenne $m = 25$ et d'écart-type $\sigma = 0,004$.

On veut que $P(25 - d < \bar{X} < 25 + d) = 0,95$

donc $d = 1,96 \sigma = 1,96 \times 0,004 = 0,00784$.

b. La moyenne des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est 24,994. Quelle est la conclusion du test ?

Pour que l'hypothèse nulle soit acceptée, la moyenne des diamètres des disques de l'échantillon doit appartenir à $[25 - 0,0078 ; 25 + 0,0078] = [24,9922 ; 25,0078]$.

L'hypothèse nulle est donc acceptée : le diamètre des disques de la production est donc 25 mm et la production est acceptée par le client.