La division euclidienne

Vous connaissez la division : au lieu d'écrire que $12 = 4 \times 3$, on peut écrire que $\dfrac{12}{4} = 3$.

De même, on peut écrire que $\dfrac{13}{4} = 3{,}25$.

On peut aussi écrire $\dfrac{13}{4} = 3 + \dfrac{1}{4}$ ou $13 = 4 \times 3 + 1$.

En arithmétique on ne connaît pas les nombres décimaux, on écrira donc $13 = 4 \times 3 + 1$ et on dira qu'en divisant 12 par 4, le quotient est 3 est le reste est 1.

On peut aussi écrire que $13 = 3 \times 3 + 5$ ou que $13 = 2 \times 3 + 9$ mais ce n'est pas une division euclidienne car le reste est trop grand. Le reste doit être inférieur à 4.

Faire la division euclidienne de 13 par 4 revient à écrire $13 = 4 \times 3 + 1$ avec $0 \leq 1 < 4$.

On peut généraliser : faire la division euclidienne de a par b revient à écrire $\underline{a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b}$.

<u>Théorème</u> : pour tout entier naturel a et tout entier naturel non nul b, il existe un seul entier naturel q et un seul entier naturel r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

<u>Démonstration</u>

<u>Existence des naturels q et r</u>

<u>Idée de la démonstration</u> : pour diviser 13 par 4 on peut écrire successivement

$13 = 4 \times 0 + 13$

$13 = 4 \times 1 + 9$

$13 = 4 \times 2 + 5$

$13 = 4 \times 3 + 1$

$13 = 4 \times 4 - 3$

Là on s'arrête car le reste doit être positif. On retient donc que $13 = 4 \times 3 + 1$.

Le quotient est 3. Le reste est 1 qui convient car $0 \leq 1 < 4$.

Démonstration : $b \neq 0$ donc $b \geq 1$ donc il existe un entier n tel que $nb > a$

(il suffit de choisir $n > a$)

donc l'ensemble E des entiers n tels que $nb > a$ n'est pas vide

donc cet ensemble E contient un plus petit élément k.

$k \neq 0$ car $a \geq 0$.

k est le plus petit élément de E donc $kb > a$ et $(k - 1)b \leq a$ donc $(k - 1)b \leq a < kb$.

On soustrait $(k - 1)b$ et on trouve $0 \leq a - (k - 1)b < b$.

On pose $q = k - 1$ et on peut écrire $0 \leq a - qb < b$.

On pose $r = a - qb$ et on bien $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Unicité des naturels q et r

On suppose que $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$ et que $a = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_2 < b$.

On a un encadrement de r_1 et un encadrement de r_2,

on peut en déduire un encadrement de $r_1 - r_2$:

$0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$ donc $0 \leq r_1 < b$ et $-b < -r_2 \leq 0$.

On ajoute ces deux écritures et on trouve $-b < r_1 - r_2 < b$.

On a une expression de r_1 et une expression de r_2,

on peut en déduire une expression de $r_1 - r_2$:

$r_1 = a - bq_1$ et $r_2 = a - bq_2$ donc $r_1 = a - bq_1$ et $-r_2 = -a + bq_2$.

On ajoute ces deux écritures et on trouve $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$.

On en déduit que $-b < b(q_2 - q_1) < b$ donc $-1 < q_2 - q_1 < 1$ donc $q_2 - q_1 = 0$ donc $q_1 = q_2$.

Or $r_1 - r_2 = b(q_1 - q_2)$ donc $r_1 - r_2 = 0$ donc $r_1 = r_2$.

Remarque : b divise a $\Leftrightarrow$ il existe un entier q tel que $a = bq$

$\Leftrightarrow$ le reste de la division de a par b est 0.

Remarque : On peut faire une division euclidienne avec des entiers négatifs : $-13 = -4 \times 4 + 3$;

4 est le quotient de la division de -13 par -4 ; 1 est le reste de cette division car $0 \leq 1 < 4$.

a ou b peuvent être négatifs et l'on démontre de la même façon que

Théorème : pour tout entier a et tout entier non nul b, il existe un seul entier naturel q et un seul entier naturel r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < | b |$.