Les équations différentielles

Résoudre l'équation $y' = y$ signifie: « donner toutes les fonctions qui sont égales à leur dérivée ».
f: $x \longmapsto e^x$ est une solution mais il y en a d'autres.
g: $x \longmapsto 2\,e^x$ est une solution car $g'(x) = 2\,e^x = g(x)$.
h: $x \longmapsto -\,e^x$ est une solution car $h'(x) = h(x)$.
i: $x \longmapsto 3{,}79\,e^x$ est une solution etc.
Les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,e^x$ où $\lambda \in$ IR.

On peut résoudre de la même façon toutes les équations différentielles du type $y' + a\,y = 0$ où $a \in$ IR.
(Ce sont les équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre).
<u>Propriété</u> : les solutions de $y' + a\,y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,e^{-a\,x}$ où $\lambda \in$ IR.

On peut aussi résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre <u>avec second membre</u>.
<u>Propriété</u> : pour trouver les solutions d'une équation différentielle avec second membre, on ajoute une solution de l'équation avec second membre aux solutions de l'équation sans second membre.

<u>Exemple</u> : $y' + 3\,y = 6$.
C'est une équation différentielle avec second membre.
La propriété demande d'ajouter
- une solution de l'équation avec second membre $y' + 3\,y = 6$

et

- les solutions de l'équation sans second membre $y' + 3\,y = 0$.

Il est à peu près évident que $f : x \longmapsto 2$ est solution.
En effet, $f'(x) = 0$ donc $f'(x) + 3\,f(x) = 0 + 3 \times 2 = 6$.
$f : x \longmapsto 2$ est une solution de l'équation avec second membre.

Cherchons les solutions de l'équation sans second membre $y' + 3\,y = 0$.
On sait résoudre ce type d'équation.
Les solutions de l'équation sans second membre sont $x \longmapsto \lambda\,e^{-3\,x}$ où $\lambda \in$ IR.

On les ajoute et on trouve les solutions de l'équation avec second membre.

Les solutions de l'équation avec second membre sont $x \longmapsto \lambda\,e^{-3\,x} + 2$ où $\lambda \in$ IR.

<u>Exercice</u> : parmi les solutions de l'équation $y' + 3\,y = 6$, donner celle qui vérifie $f(1) = 3$.

Les solutions de cette équation sont $x \longmapsto \lambda\,e^{-3\,x} + 2$ où $\lambda \in$ IR.

Si $f(1) = 3$, alors $\lambda\,e^{-3 \times 1} + 2 = 3$,
alors $\lambda\,e^{-3} = 1$,

alors $\lambda = e^{3}$,

alors $f(x) = e^{3} \times e^{-3x} + 2$

alors $f(x) = e^{3-3x} + 2$.

La solution demandée est $f : x \longmapsto e^{3-3x} + 2$.

On dit que $f(1) = 3$ est une condition initiale.

Parmi toutes les solutions de l'équation $y' + 3y = 6$, seule $x \longmapsto e^{3-3x} + 2$ vérifie cette condition initiale.

Exercice

Résoudre l'équation $y' + 5y = 10$.

Donner la solution qui vérifie la condition initiale $f(1) = 3$.

Rappel: pour trouver les solutions d'une équation différentielle avec second membre, on ajoute une solution de l'équation avec second membre aux solutions de l'équation sans second membre.

Commençons par résoudre l'équation sans second membre : $y' + 5y = 0$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \longmapsto \lambda e^{-5x}$.

Donnons une solution de l'équation avec second membre : $y' + 5y = 10$.

Une solution de cette équation est $f : x \longmapsto 2$.

En effet, $f'(x) = 0$ et $f(x) = 2$ donc $f'(x) + 5f(x) = 10$.

On ajoute les deux et on trouve les solutions de l'équation avec second membre $y' + 5y = 10$.

Les solutions de cette équation sont $f : x \longmapsto \lambda e^{-5x} + 2$.

Parmi ces solutions, donnons celle qui vérifie la condition initiale $f(1) = 3$.

$f(1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{-5 \times 1} + 2 = 3$

$\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{-5} = 1$

$\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{5}$.

La solution demandée est $f : x \longmapsto e^{5} e^{-5x} + 2$.

On peut aussi écrire $f : x \longmapsto e^{-5(x-1)} + 2$.

Un sujet d'annales de BTS sur une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2\,y = 2\,e^{-2t}$ définie sur $[\,0 : +\infty\,[$.
1. Donner les solutions sur $[\,0 : +\infty\,[$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2\,y = 0$.

Les solutions de (E_0) sont $t : \longmapsto \lambda\, e^{-2t}$ ($\lambda \in \mathrm{IR}$).

2. Soit h la fonction définie sur $[\,0 : +\infty\,[$ par $h(t) = 2\,t\,e^{-2t}$.
Montrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Dérivons h : $h = u \times v$ avec $u(t) = 2\,t$ et $v(t) = e^{-2t}$. $u'(t) = 2$ et $v'(t) = -2\,e^{-2t}$
donc $h'(t) = 2\,e^{-2t} - 4\,t\,e^{-2t}$.
donc $h'(t) + 2\,h(t) = 2\,e^{-2t} - 4\,t\,e^{-2t} + 4\,t\,e^{-2t} = 2\,e^{-2t}$
donc h est bien solution de (E).

3. En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E).

Les solutions de (E) sont donc $t : \longmapsto \lambda\, e^{-2t} + 2\,t\,e^{-2t}$ ($\lambda \in \mathrm{IR}$).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

f est solution de (E) donc $f(t) = \lambda\, e^{-2t} + 2\,t\,e^{-2t}$.
$f(0) = 1$ donc $\lambda\, e^{-2\times 0} + 2 \times 0 \times e^{-2\times 0} = 1$ donc $\lambda = 1$.
La solution demandée est donc $t : \longmapsto e^{-2t} + 2\,t\,e^{-2t}$.

Un sujet d'annales de bac sur une équation différentielle

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.

Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f. Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe, $f(t)$ représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.

On admet que la fonction f, définie sur $[\,0 ; +\infty\,[$, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}00625\,y = 30.$$

1. a. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}00625\,y = 0$.
b. Déterminer le réel a tel que la fonction constante $h : t \longmapsto a$ soit une solution de l'équation $y' + 0{,}00625\,y = 30$.
c. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}00625\,y = 30$.
d. Sachant que $f(0) = 0$, déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel t de $[\,0 ; +\infty\,[$.

Dans les questions suivantes, on admet que pour tout réel t de $[\,0 ; +\infty\,[$, on a :

$$f(t) = 4\,800 - 4\,800\,e^{-0{,}00625\,t}.$$

2. Calculer, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures. Le résultat sera arrondi à l'unité.

3. a. Calculer $f\,'(\,t\,)$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f (on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(\,t\,) = 4\,800$).

b. Ce sens de variation de la fonction f est-il cohérent avec la situation concrète étudiée ? Pourquoi ?

4. La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3 % du volume d'eau de la piscine.

Cette piscine peut-elle être dangereuse pour la peau ? Justifier.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6 % du volume d'eau de la piscine.

Déterminer, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

1. a. Les solutions de l'équation sans second membre $y' + 0{,}00625\,y = 0$ sont $g : t \longmapsto \lambda\, e^{-0{,}00625\,t}$.

b. Si $h : \longmapsto a$, alors $h\,' : t \longmapsto 0$

donc si $h : \longmapsto a$, alors $h\,'(\,t\,) + 0{,}00625\, h\,(\,t\,) = 0{,}00625\, a$

donc si $h : \longmapsto a$ est solution de l'équation $y' + 0{,}00625\,y = 30$, alors $0{,}00625\,a = 30$

alors $a = 4\,800$.

Finalement, une solution de l'équation avec second membre $y' + 0{,}00625\,y = 30$ est $h : t \longmapsto 4\,800$.

c. Les solutions de l'équation avec second membre sont $f : t \longmapsto \lambda\, e^{-0{,}00625\,t} + 4\,800$.

d. $f\,(\,0\,) = 0$ donc $\lambda\, e^{-0{,}00625\,t} + 4\,800 = 0$.

donc $\lambda\, e^{0{,}00625} + 4\,800 = 0$.

donc $\lambda + 4\,800 = 0$.

donc $\lambda = -\,4\,800$

donc $f\,(\,t\,) = 4\,800 - 4\,800\, e^{-0{,}00625\,t}$.

2. $f\,(\,72\,) = 4\,800 - 4\,800\, e^{-0{,}00625 \times 72} \approx 1\,739$ L.

En 72 heures la piscine contiendra 1 739 litres d'eau contaminée.

3. a. $f\,'(\,t\,) = 4\,800 \times 0{,}00625\, e^{-0{,}00625\, \mathrm{t}}$.

donc $f\,'(\,t\,) > 0$ pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$

donc f est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$

et on peut dresser le tableau de variations :

t	0	$+\infty$
$f\,'(\,t\,)$	$+$	
$f\,(\,t\,)$	0 ↗	4800

b. Ce sens de variation semble cohérent avec la situation concrète étudiée.

En effet

- la fonction est croissante car à chaque instant le puits ajoute de l'eau contaminée.
- la limite est 4 800 qui inférieure au volume de la piscine qui est de 80 000 litres.

- l’eau de la piscine n’est jamais totalement de l’eau contaminée car les plantes filtrent l’eau.

4. 4 800 litres représentent $\frac{4.800}{80.000}$ = 0,06 = 6 % de l’eau de la piscine.

La quantité d’eau contaminée peut donc dépasser 3 %.

La piscine peut donc être considérée comme dangereuse pour la peau.

5. 3 % de l’eau de la piscine représentent 80 000 × 0,03 = 2 400 L.

L’instant t demandé vérifie donc

$$\begin{aligned} f(t) = 2\,400 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\,800 - 4\,800\, e^{-0,00625\,t} = 2\,400 \\ &\Leftrightarrow \quad -4\,800\, e^{-0,00625\,t} = -2\,400 \\ &\Leftrightarrow \quad 4\,800\, e^{-0,00625\,t} = 2\,400 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-0,00625\,t} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -0,00625\,t = \ln\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -0,00625\,t = -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{0,00625} \approx 111 \text{ h.} \end{aligned}$$

<u>L’eau de la piscine deviendra impropre à la baignade après 4 jours et 15 heures</u>.