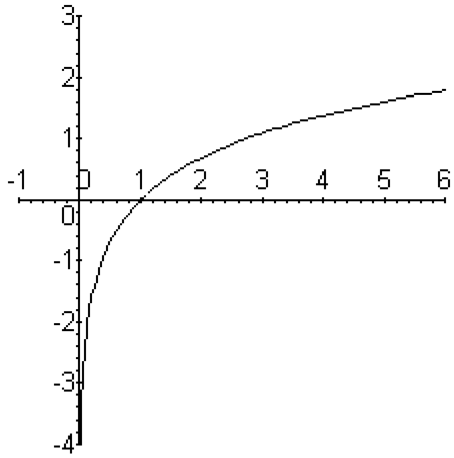
La fonction exponentielle

Voici la représentation de la fonction logarithme népérien :



et voici son tableau de variations :

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$\ln x$	$-\infty \nearrow +\infty$

On constate que quelque soit le nombre *a*, il existe un nombre *b* tel que ln *b* = *a*.
On dit que *b* = exp *a*.
exp est la <u>fonction exponentielle</u>.
La fonction exponentielle est la <u>réciproque</u> de la fonction ln.
Par exemple, ln 1 = 0 donc exp 0 = 1.
Autre exemple : ln *e* = 1 donc exp 1 = *e*.

$$1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0 \qquad\qquad e \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$$

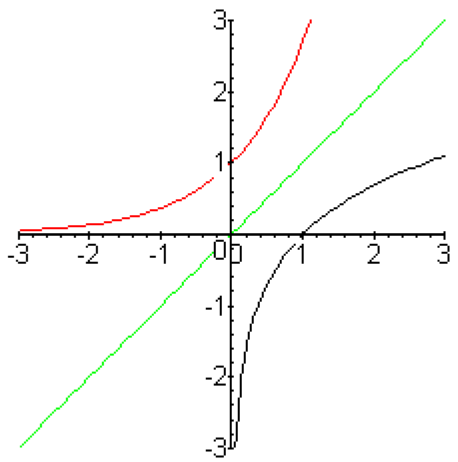
Et plus généralement,
<u>Propriété</u> : si *b* > 0, alors exp (ln *b*) = *b* :

$$b \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} a \qquad\qquad]\,0\,;+\infty\,[\ \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}}\ ]-\infty\,;+\infty\,[$$

Cela marche aussi dans l'autre sens : la fonction ln est la réciproque de la fonction exp :
<u>Propriété</u> : ln (exp *a*) = *a*, quelque soit le nombre *a* :

$$a \;\underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}}\; b \qquad]-\infty\,;+\infty[\;\underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}}\;]\,0\,;+\infty[$$

Voici la représentation de la fonction logarithme et de la fonction exponentielle :



C'est la même chose qu'entre la fonction carré et la fonction racine :

$$3 \;\underset{\sqrt{\ }}{\overset{\text{Carré}}{\rightleftarrows}}\; 9$$

$\sqrt{3^2} = 3$ et $\sqrt{3}^2 = 3$.

Cela permet de résoudre des équations :

ln *x* = 2 ⇔ exp (ln *x*) = exp 2
⇔ *x* = exp 2

De même
exp *x* = 3 ⇔ ln (exp *x*) = ln 3
⇔ *x* = ln 3

Ou encore
ln *x* = - 4 ⇔ exp (ln *x*) = exp (- 4)
⇔ *x* = exp (- 4)

Ou encore $\exp x = -3$
Il n'y a pas de solution car $\exp x > 0$ pour tout x.

Propriétés

Rappel : le logarithme népérien transforme un produit en somme : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.
Propriété : l'exponentielle transforme une somme en produit : $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$.
Démonstration :

$a \times b = \exp(\ln a \times b) = \exp(\ln a + \ln b)$
$a \times b = \exp(\ln a) \times \exp(\ln b)$
donc $\exp(\ln a) \times \exp(\ln b) = \exp(\ln a + \ln b)$.
Si l'on décide que $\ln a = x$ et que $\ln b = y$, cela donne $\exp(x + y) = \exp x \times \exp y$.

Remarque : soit n un entier. Les fonction ln et exp sont réciproques donc $\ln(\exp n) = n$.
La fonction ln transforme un produit en somme donc $\ln(e^n) = n \ln e = n$.
On constate donc que pour tout entier n, $\exp n = e^n$.
On écrira donc : $\exp x = e^x$., pour tout $x \in$ IR.
Remarque : ce n'est pas bien étonnant car
* les fonctions puissances transforment une somme en produit : $2^{3+4} = 2^3 \times 2^4$.
* $e^0 = 1$ comme $2^0 = 1$.

Remarque : cherchez la touche e^x sur votre calculette.

Exercice : donner une valeur approchée du nombre x tel que $\ln x = 5$.

$\ln x = 5 \iff e^{\ln x} = e^5$
$\iff x = e^5$

La calculette donne $x \approx 148{,}4$.

Les propriétés de l'exponentielle sont les mêmes que les propriétés des fonctions puissances :
Propriétés : $e^{x+y} = e^x \times e^y$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = e^x \times \frac{1}{e^y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{2x} = e^{x+x} = e^x \times e^x = (e^x)^2$$

$$e^{n \times x} = (e^x)^n$$

Exercices : résoudre

$e^{x+1} = 5 \iff \ln e^{x+1} = \ln 5 \iff x + 1 = \ln 5 \iff x = -1 + \ln 5$
$S = \{-1 + \ln 5\}$

$e^{x+1} = e^{-4x} \iff \ln(x+1) = \ln(-4x) \iff x + 1 = -4x \iff x = -\frac{1}{5}$

$S = \{-\frac{1}{5}\}$

$e^{2x} + e^x - 6 = 0 \iff (e^x)^2 + e^x - 6 = 0$

C’est une équation du second degré dont l’inconnue est e^x. $a = 1$; $b = 1$; $c = -6$.
$\Delta = 25$ et les racines sont - 3 et 2
donc $e^x = -3$ ou $e^x = 2$.
$e^x > 0$ donc la solution $e^x = -3$ doit être rejetée.
Finalement $e^x = 2$ donc $x = \ln 2$.

S = { ln 2 }

Variations, limites

On se souvient du tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$\ln x$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

$\ln :]0\,;+\infty[\longrightarrow]-\infty\,;+\infty[$

On en déduit le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

$\exp :]-\infty\,;+\infty[\longrightarrow]0\,;+\infty[$

L’ensemble de définition de la fonction exponentielle est] - ∞ ; + ∞ [.
On cherchera donc les limites en - ∞ et en + ∞.
<u>Propriétés</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Cela permet facilement de dire que
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^x = +\infty$, en effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

De même
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^x = +\infty$, en effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

En revanche, pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} e^x$ il y a un problème puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
On appelle cela une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.
Propriété : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} e^x = +\infty$.

On peut dire que e^x l’emporte sur $\frac{1}{x}$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} e^x = +\infty$, quel que soit l’entier positif n.

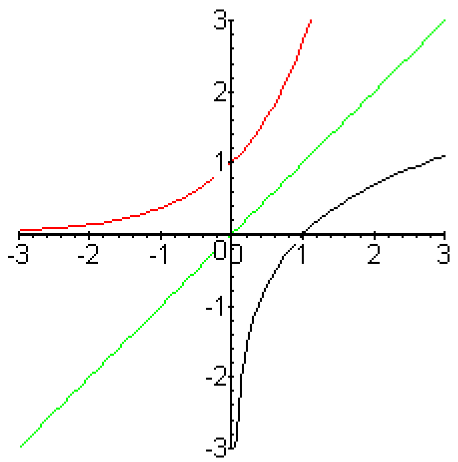
Propriétés : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Cela permet facilement de dire que
$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} e^x = 0$, en effet, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

De même
$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} e^x = 0$, en effet, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, quel que soit l'entier positif n.

En revanche, pour $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x$ il y a un problème puisque $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
C'est une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.
Propriété : $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$.
On peut dire que e^x l'emporte sur x.
De même $\lim_{x \to -\infty} x^n\, \mathrm{e}^x = 0$, quel que soit l'entier positif n.
On peut même dire que l'exponentielle l'emporte sur n'importe quel polynôme :
$\lim_{x \to -\infty} (x^7 - 5x^3 + 2x - 5)\, \mathrm{e}^x = 0$

On a vu que l'exponentielle l'emporte sur n'importe quel polynôme.
Cela se voit sur la représentation graphique : l'exponentielle croit plus vite qu'un polynôme.



On voit aussi qu'un polynôme croit plus vite que le logarithme.
Un polynôme l'emporte sur le logarithme.

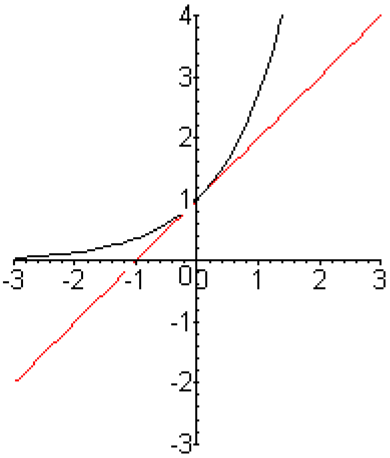
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} \ln x = 0$, quel que soit l'entier strictement positif n.

Propriétés : quel que soit l'entier strictement positif n,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Dérivée

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle.
Cela permet de donner les variations de la fonction exponentielle :
exp x est positif pour tout x
donc exp’ x est positif pour tout x
donc exp est une fonction croissante.
Cela permet de donner la pente de tangentes à la représentation de la fonction exponentielle :
exp 0 = 1
donc exp’ 0 = 1
donc la tangente au point d’abscisse 0 a pour pente 1.



$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
e^{2x}	$2e^{2x}$
e^{-3x+5}	$-3e^{-3x+5}$
$e^{(x^2)}$	$2x\,e^{(x^2)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\times e^{u(x)}$

Primitives

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$2e^{2x}$	e^{2x}
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$-3e^{-3x+5}$	$-\frac{1}{3}e^{-3x+5}$
$u'(x)\times e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$2x\,e^{x^2}$	e^{x^2}