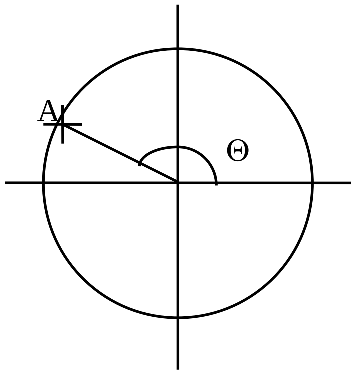
La forme exponentielle d’un nombre complexe

Tout nombre complexe peut s’écrire sous forme algébrique : $z = a\,i + b$ où $a \in$ IR et $b \in$ IR.

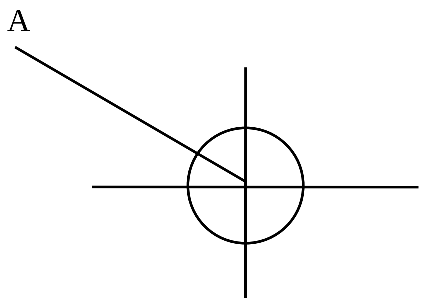
Tout nombre complexe de module 1 peut s’écrire sous forme trigonométrique :
$z = \cos \Theta + i \sin \Theta$.



Le point A est l’image du complexe de module 1 et d’argument Θ.

Le module 1 est la distance OA entre A et l’origine du repère.

Si, par exemple, le module est 4, la distance OA est 4 et le graphique devient :



La forme trigonométrique du complexe de module 4 et d’argument Θ est $4\,(\cos \Theta + i \sin \Theta)$.

<u>Propriété</u> : tout nombre complexe peut s’écrire sous forme trigonométrique :
$z = |\,z\,|\,(\cos \Theta + i \sin \Theta)$.

<u>Définition</u> : $e^{i.\theta} = \cos \Theta + i \sin \Theta$.
La forme exponentielle du nombre complexe de module 1 et d’argument Θ est $e^{i.\theta}$.
La forme exponentielle d’un nombre complexe d’argument Θ est $z = |\,z\,|\,e^{i.\theta}$.

<u>Exemples</u> : $1 = e^{i.0} = e^{0}$

$2\,i = 2\,e^{i.\frac{\pi}{2}}$

$-5 = 5\,e^{i.\pi}$

$-4\,i = 4\,e^{i.\frac{3\pi}{2}}$

Les propriétés de l'exponentielle réelle sont valables pour l'exponentielle complexe.
En particulier la transformation d'une somme en produit.

$e^{i.\theta}\ e^{i.\theta'}$ = (cos Θ + i sin Θ) (cos Θ' + i sin Θ')
= cos Θ cos Θ' + i cos Θ sin Θ' + i sin Θ cos Θ' - sin Θ sin Θ'
= (cos Θ cos Θ' - sin Θ sin Θ') + i (cos Θ sin Θ' + sin Θ cos Θ')

$e^{i.\theta}\ e^{i.\theta'} = e^{i.(\theta+\theta')}$ = cos (Θ + Θ') + i sin (Θ + Θ')

On en déduit les formules de somme

cos (Θ + Θ') = cos Θ cos Θ' - sin Θ sin Θ'
sin (Θ + Θ') = cos Θ sin Θ' + sin Θ cos Θ'

<u>Module et argument</u>

Rappel : le module d'un produit est le produit des modules.
l'argument d'un produit est le produit des arguments.

Ex : $z_1 = 2\,i$; z_1 a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.

$z_2 = -\,3$; z_2 a pour module 3 et pour argument π.

Examinons le produit : $z_3 = z_1 \times z_2 = 2\,i \times (-\,3) = -\,6\,i$.

Le module de z_3 est $2 \times 3 = 6$.

L'argument de z_3 est $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$.

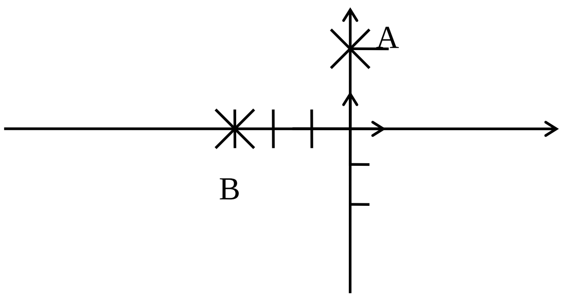
Avec l'exponentielle complexe, cela donne

$z_1 = 2\,e^{i.\frac{\pi}{2}}$ $z_2 = 3\,e^{i.\pi}$ $z_3 = z_1 \times z_2 = 2\,e^{i.\frac{\pi}{2}} \times 3\,e^{i.\pi} = 6\,e^{i.(\frac{\pi}{2}+\pi)} = 6\,e^{i.\frac{3\pi}{2}}$.

Le module de z_3 est encore $2 \times 3 = 6$. L'argument de z_3 est encore $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$.

On constate encore que le module du produit est le produit des modules et que l'argument du produit est la somme des arguments.

On peut aussi consulter un graphique où A, B et C sont les images de z_1 , z_2 et z_3.



<u>Exercice</u> : $z_1 = e^{i.\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = 3\ e^{-i.\frac{\pi}{6}}$.

Donner la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$ et de $\frac{z_1}{z_2}$.

Le module de z_1 est 1, le module de z_2 est 3 donc le module de $z_1 \times z_2$ est $1 \times 3 = 3$.

L'argument de z_1 est $\frac{\pi}{3}$, l'argument de z_2 est $-\frac{\pi}{6}$

donc l'argument de $z_1 \times z_2$ est $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Finalement $z_1 \times z_2 = 3\ e^{i.\frac{\pi}{6}}$.

De même, le module de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{3}{1} = 3$.

L'argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Finalement $\frac{z_1}{z_2} = 3\ e^{i.\frac{\pi}{2}}$.