Factoriser, pourquoi ? comment ?

$3 (x + 5) = 3 \times x + 3 \times 5 = 3 x + 15$

$3 (x - 5)$ est le <u>produit</u> de 3 et de $x + 5$.
$3 x + 15$ est la <u>somme</u> de $3 x$ et de 15.

De gauche à droite, on a transformé une somme en produit, on dit qu'on a <u>développé</u>.
De droite à gauche, on a transformé un produit en somme, on dit qu'on a <u>factorisé</u>.

$3 x = 3 \times x$; $15 = 3 \times 5$, on dit donc que 3 est un facteur commun à $3 x$ et à 15.
Pour la factorisation, on a utilisé un facteur commun.

Il y a une autre façon de factoriser : utiliser une identité.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2 a b + b^2$$
$$(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$$

Les expressions de gauche sont des produits.
Les expressions de droite sont des sommes.
Les passages de gauche à droite sont donc des développements.
Les passages de droite à gauche sont donc des factorisations.

Pour des exemples de factorisations, voir le fichier « calculs, équations etc. »

<u>Premier exercice</u>

$\underline{f (x) = (x + 2)^2 - (3 x - 4)^2}$

1/ Développer et réduire $f (x)$

$(x + 2)^2$ est de la forme $(a + b)^2$ donc $(x + 2)^2 = x^2 + 4 x + 4$.
$(3 x - 4)^2$ est de la forme $(a - b)^2$ donc $(3 x - 4)^2 = 9 x^2 - 12 x + 16$.
Finalement,

$$\begin{aligned} f (x) &= (x + 2)^2 - (3 x - 4)^2 \\ &= x^2 + 4 x + 4 - (9 x^2 - 24 x + 16) \\ &= x^2 + 4 x + 4 - 9 x^2 + 24 x - 16 \\ &= - 8 x^2 + 28 x - 12 \end{aligned}$$

$$\underline{f (x) = - 8 x^2 + 28 x - 12}$$

2/ Factoriser $f (x)$

$(x + 2)^2 - (3 x - 4)^2$ est sous la forme $a^2 - b^2$

$$\begin{aligned} \text{donc } (x + 2)^2 - (3 x - 4)^2 &= ((x + 2) + (3 x - 4)) ((x + 2) - (3 x - 4)) \\ &= (x + 2 + 3 x - 4) (x + 2 - 3 x + 4) \end{aligned}$$

$= (4x - 2)(-2x + 6)$

<u>$f(x) = (4x - 2)(-2x + 6)$</u>

3/ Calculer $f(1 - \sqrt{5})$

On a le choix entre trois expressions de $f(x)$. Elles permettent toutes de faire le calcul.

Avec $f(x) = (4x - 2)(-2x + 6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(1 - \sqrt{5}) &= (4(1 - \sqrt{5}) - 2)(-2(1 - \sqrt{5}) + 6) \\
&= (4 - 4\sqrt{5} - 2)(-2 + 2\sqrt{5} + 6) \\
&= (2 - 4\sqrt{5})(4 + 2\sqrt{5}) \\
&= 8 + 4\sqrt{5} - 16\sqrt{5} - 40 \\
&= -32 - 12\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Avec $f(x) = (x + 2)^2 - (3x - 4)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(1 - \sqrt{5}) &= (1 - \sqrt{5} + 2)^2 - (3(1 - \sqrt{5}) - 4)^2 \\
&= (3 - \sqrt{5})^2 - (3 - 3\sqrt{5} - 4)^2 \\
&= (3 - \sqrt{5})^2 - (-1 - 3\sqrt{5})^2 \\
&= (3 - \sqrt{5})^2 - (1 + 3\sqrt{5})^2 \quad \text{deux nombres opposés ont le même carré} \\
&= 9 - 6\sqrt{5} + 5 - (1 + 6\sqrt{5} + 45) \\
&= 14 - 6\sqrt{5} - (46 + 6\sqrt{5}) \\
&= 14 - 6\sqrt{5} - 46 - 6\sqrt{5} \\
&= -32 - 12\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Avec $f(x) = -8x^2 + 28x - 12$, on obtient :

$f(1 - \sqrt{5}) = -8(1 - \sqrt{5})^2 + 28(1 - \sqrt{5}) - 12$

Le calcul de $(1 - \sqrt{5})^2$ peut être fait à part :

$(1 - \sqrt{5})^2$ est de la forme $(a - b)^2$ donc

$$\begin{aligned}
(1 - \sqrt{5})^2 &= 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 \\
&= 1 - 2\sqrt{5} + 5 \\
&= 6 - 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Reprenons: $f(1 - \sqrt{5}) = -8(1 - \sqrt{5})^2 + 28(1 - \sqrt{5}) - 12$

$$\begin{aligned}
&= -8(6 - 2\sqrt{5}) + 28(1 - \sqrt{5}) - 12 \\
&= -48 + 16\sqrt{5} + 28 - 28\sqrt{5} - 12 \\
&= -32 - 12\sqrt{5}
\end{aligned}$$

4/ Résoudre l'équation $f(x) = 0$

Parmi les trois expressions de $f(x)$ une seule permet de faire le calcul, la forme factorisée.

En effet, une règle bien connue permet de traiter un produit nul.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (4x - 2)(-2x + 6) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x = 2 \quad \text{ou} \quad -2x = -6
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad$ ou $\quad x = 3$

$S = \{ \frac{1}{2} ; 3 \}$

5/ Résoudre l'équation $f(x) = -12$

Parmi les trois expressions de $f(x)$ une seule permet de faire le calcul, la forme développée.

$f(x) = -12 \quad \Leftrightarrow \quad -8x^2 + 28x - 12 = -12$

$\Leftrightarrow \quad -8x^2 + 28x = 0$

Là il y a un problème car on sait traiter un produit nul mais pas une somme nulle.

Le mieux à faire est de transformer cette somme en produit, c'est à dire de factoriser.

$f(x) = -12 \quad \Leftrightarrow \quad -8x^2 + 28x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(-8x + 28) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad -8x + 28 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad -8x = -28$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = \frac{-28}{-8}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = \frac{7}{2}$

$S = \{ 0 ; \frac{7}{2} \}$

<u>Deuxième exercice</u>

$g(x) = x - 9x^3$

1/ Factoriser $g(x)$

On commence par remarquer que $x = x \times 1$ et que $9x^3 = x \times 9x^2$.

x est donc un facteur commun donc

$g(x) = x - 9x^3$

$= x(1 - 9x^2)$

Ceci est un produit donc on a bien factorisé.

Cependant $1 - 9x^2$ est une somme que l'on peut transformer en produit.

On peut donc continuer à factoriser.

$g(x) = x(1 - 9x^2)$

$= x(1 - 3x)(1 + 3x)$

$\underline{g(x) = x(1 - 3x)(1 + 3x)}$

Remarque : $9x^2$ est le carré de $3x$, en effet, cherchons le carré de $3x$:
$(3x)^2 = 3x \times 3x = 3 \times 3 \times x \times x = 9x^2$.
$9x^2$ est bien le carré de $3x$.

2/ Résoudre l'équation $g(x) = 0$

Pour cela on peut chercher à résoudre deux équations

$x - 9x^3 = 0$ ou $x(1 - 3x)(1 + 3x) = 0$

Encore une fois, on sait traiter un produit nul mais pas une somme nulle. On choisit donc la forme factorisée.

$$\begin{aligned}
g(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(1 - 3x)(1 + 3x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 3x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + 3x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x = -1 \quad \text{ou} \quad 3x = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{1}{3} \right\}$$