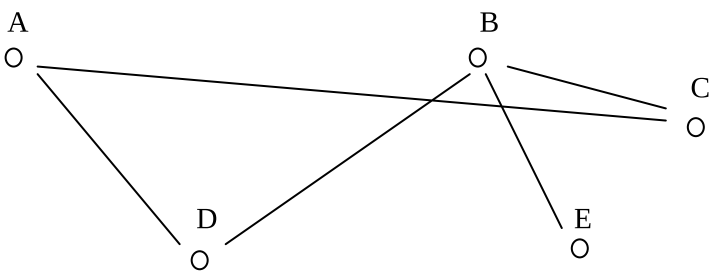
Les graphes

Un graphe est un ensemble de sommets (des points) et d'arrêtes, qui relient certains sommets.



Ce graphe a cinq sommets, on dit qu'il est d'ordre 5.

Les sommets A et C sont reliés par une arrête, on dit qu'ils sont adjacents.

Le sommet A est relié à deux sommets, on dit qu'il est de degré 2.

Le sommet B est de degré 3.

A et C sont adjacents, C et B sont adjacents, B et D sont adjacents. On dit que ACBD est une chaîne.

Pour aller de A à D par cette chaîne, on emprunte trois arrêtes donc la longueur de cette chaîne est 3.

La chaîne ACBDA est une chaîne fermée de longueur 4.

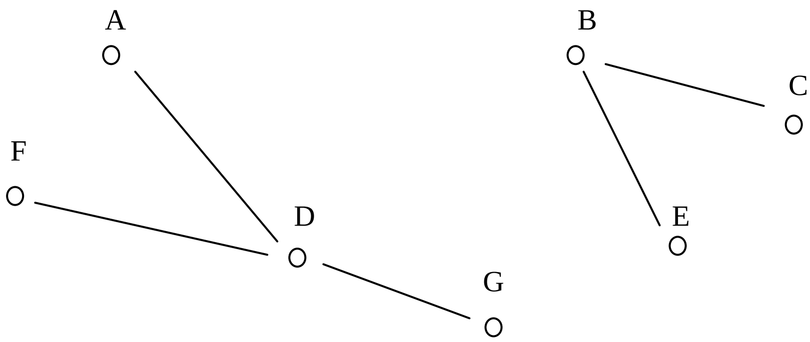
La chaîne BDACBE parcourt une fois et une seule chaque arrête. On dit que c'est une chaîne eulérienne.

Un graphe est connexe s'il existe une chaîne reliant n'importe quel sommet à n'importe quel autre.

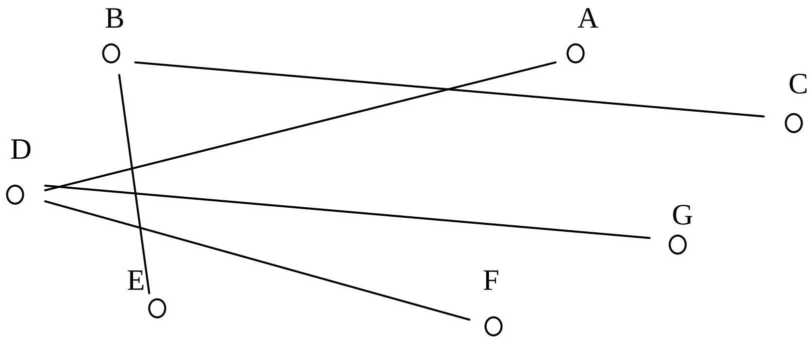
Le graphe précédent est connexe.

On peut aussi dire qu'un graphe connexe est un graphe en seul morceau.

Ce graphe n'est pas connexe car aucune chaîne ne relie A et B.



Ce graphe n'est pas connexe non plus.



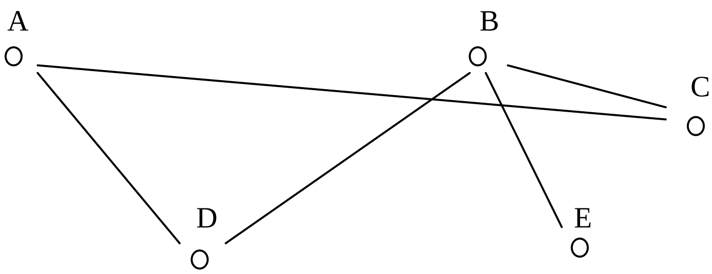
Ces deux dessins représentent le même graphe.

Pour montrer qu'un graphe n'est pas connexe, il suffit de donner deux sommets qui ne sont reliés par aucune chaîne.

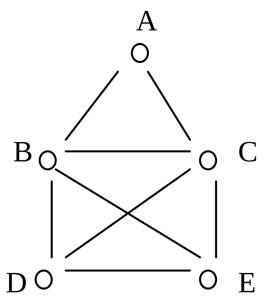
Par exemple, le graphe n'est pas connexe car aucune chaîne ne relie les sommets A et B.

Pour montrer qu'un graphe est connexe, il suffit de donner une chaîne passant par chaque sommet.

Par exemple, ce graphe est connexe car la chaîne ADBEBC passe par tous les sommets.



On peut tracer ce graphe sans lever le crayon,



par exemple en parcourant la chaîne EDBACBECD.

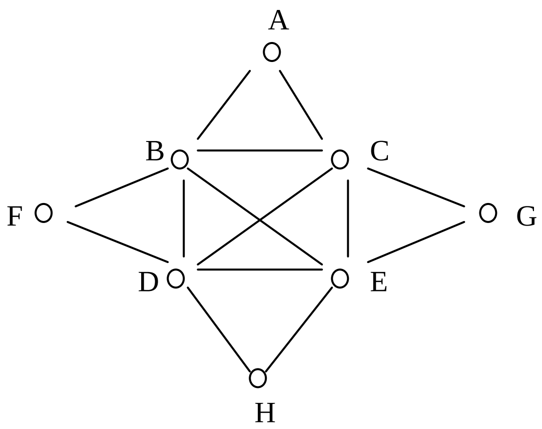
La chaîne EDBACBECD est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arrête du graphe.

On dit que DBACDEBCE est une <u>chaîne eulérienne</u>.

Ce graphe admet d'autres chaînes eulériennes, par exemple DECBACDBE et DBACDEBCE.

On remarque toutes les chaînes eulériennes de ce graphe commencent par D et finissent par E, ou commencent par E et finissent par D.

D’autres graphes n’admettent pas de chaîne eulérienne.

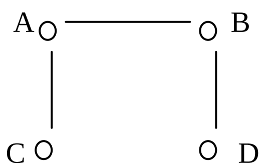


<u>Théorème d’Euler</u> : pour qu’un graphe connexe admette une chaîne eulérienne, il faut et il suffit qu’il ait zéro ou deux sommets de degré impair.

Sur le graphe précédent, il y a quatre sommets de degré 5 : B, C, D et E. Il n’y a donc pas de chaîne eulérienne.

Sur le précédent, les sommets D et E sont de degré 3 et les sommets A, B et C de degré pair. On peut donc trouver une chaîne eulérienne.

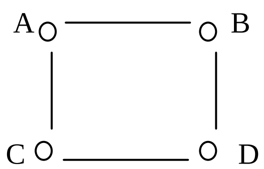
S’il y a deux sommets de degré impair, les extrémités de n’importe quelle chaîne eulérienne sont les deux sommets de degrés impairs :



Il n’y a que deux chaînes eulériennes : CABD et DBAC,

Leurs extrémités sont les sommets de degré 1 : C et D.

S’il n’y a pas de sommet de degré impair, toutes les chaînes eulérienne sont fermées :



Il n’y a huit chaînes eulériennes : ABCD ; BDCA ; DCAB

CABD ; ACDB ; CDBA ; DBAC et BACD.

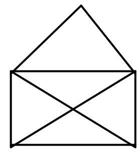
Ce sont des chaînes fermées ou <u>cycles</u>.

Conséquences :

On peut dessiner ceci sans lever le crayon,

à condition de partir de l’un des sommets de degré 3.

L’autre sommet de degré 3 sera le sommet d’arrivée.

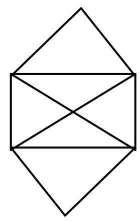


On peut dessiner ceci sans lever le crayon,

en partant de n'importe quel sommet

car il n'y a pas de sommet de degré impair.

Le sommet de départ sera le sommet d'arrivée.

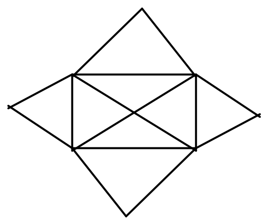


On ne peut pas dessiner ceci sans lever le crayon

car il y a 4 sommets de degré 5.

Remarque : le nombre de sommets de degré impair

peut être 0 ; 2 ; 4 ; 6 etc. mais pas 1 ; 3 ; 5 etc.



Pour n'importe quel graphe le nombre de sommets de degré impair est un nombre pair (car chaque fois qu'on ajoute une arête on ajoute deux degré à l'ensemble des sommets du graphe).

Définition : un graphe complet est un graphe tel que tout sommet est adjacent à tout autre sommet.