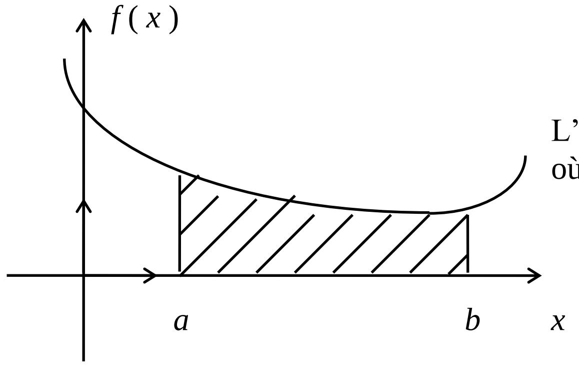
Intégrales

Calcul de l'aire comprise entre une courbe et l'axe (Ox)

Propriété



L'aire de la surface hachurée est $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

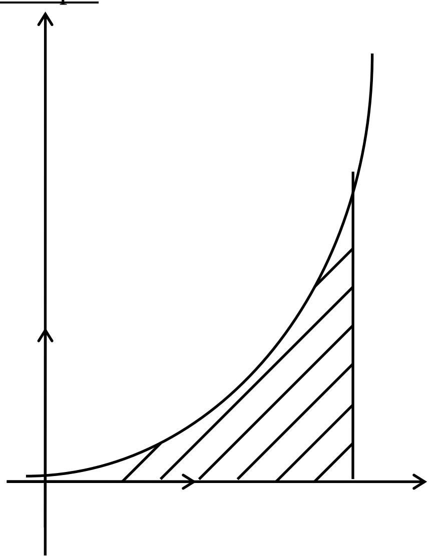
Attention, cela ne marche que si f est une fonction positive ($f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a ; b]$).

La quantité $F(b) - F(a)$ se note $\int_a^b f(x)\,dx$.

On note aussi $[F(x)]_a^b$.

On dit que c'est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$.
On dit aussi que c'est l'intégrale de la fonction f entre a et b.

Exemple



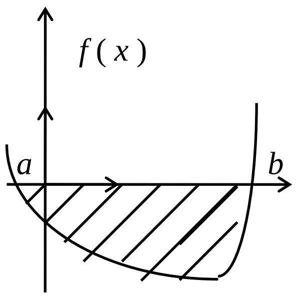
La courbe est la représentation de $f : x \mapsto x^2$.
Donner l'aire de la surface hachurée.

$\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f.

L'aire demandée est $\int_0^1 x^2\,dx = [F(x)]_0^1$

$$= \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)$$
$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$
$$= \frac{1}{3}.$$

Si la fonction *f* est négative, la courbe est en dessous de l’axe.

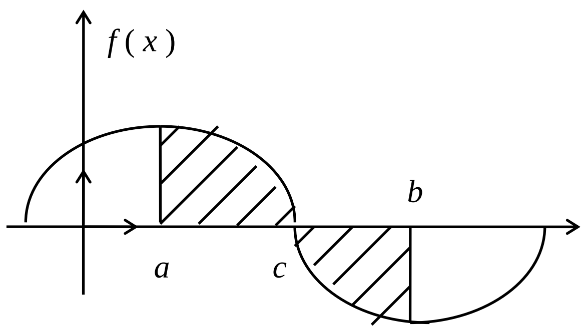


L’aire entre la courbe et l’axe horizontal est bien entendue positive

mais on dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est négative.

$\int_a^b f(x)\,dx$ n’est plus l’aire hachurée mais son opposé.

Si la fonction *f* change de signe



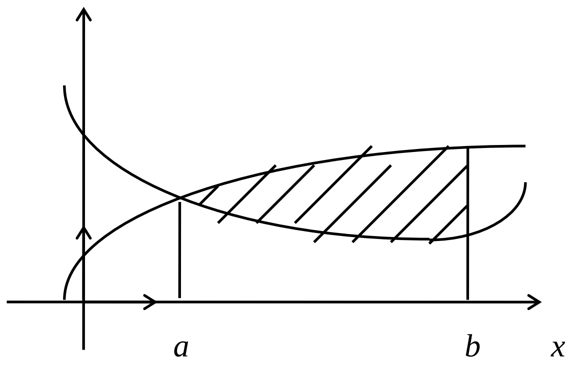
L’aire hachurée est composée d’une partie en dessous de l’axe et d’une partie en dessus de l’axe.

L’aire de la partie gauche est $\int_a^c f(x)\,dx$.

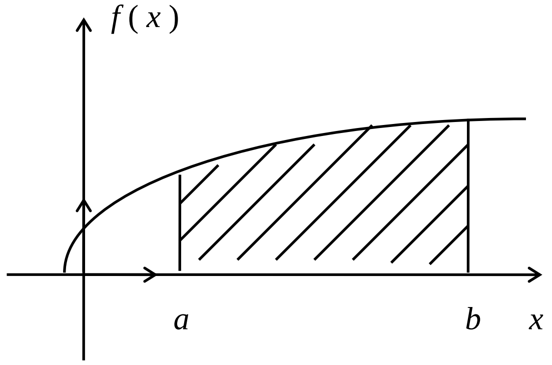
L’aire de la partie droite est $-\int_c^b f(x)\,dx$. Cette aire est bien entendu positive.

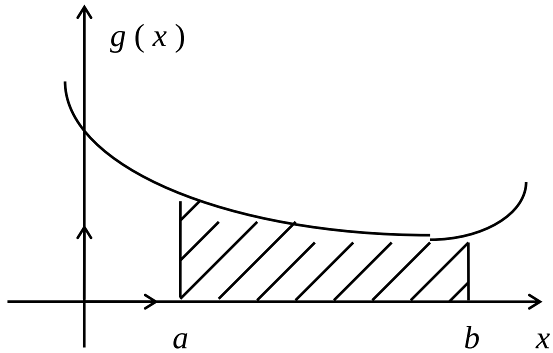
L’aire hachurée est la somme des deux : $\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$.

Calcul de l'aire comprise entre deux courbes



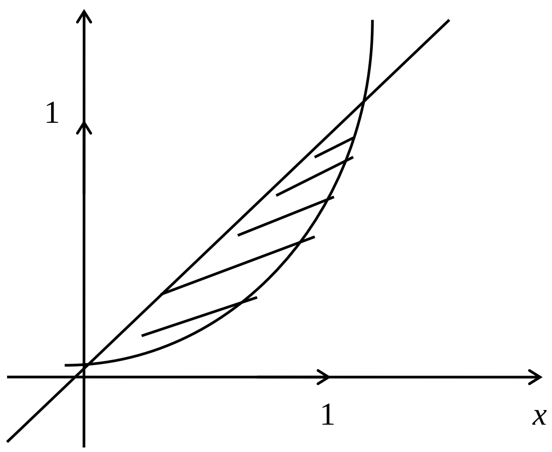
Pour trouver l'aire de la surface hachurée, il suffit de soustraire les deux aires suivantes :

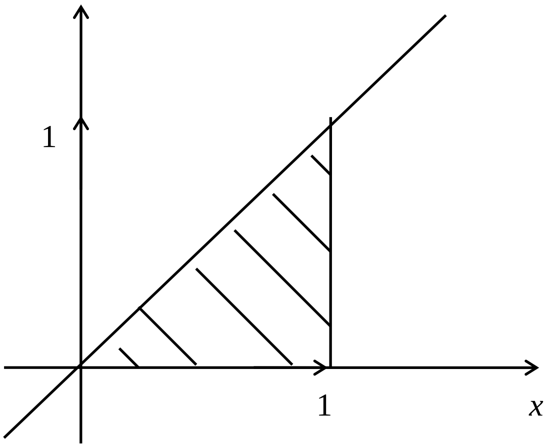




Exemple

Calculons l'aire de la surface comprise
entre la représentation de $f : x \mapsto x$ et la représentation de $g : x \mapsto x^2$.

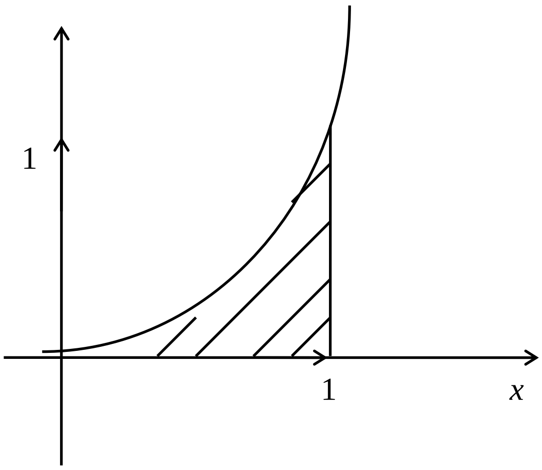




L’aire hachurée est

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$



L’aire hachurée est

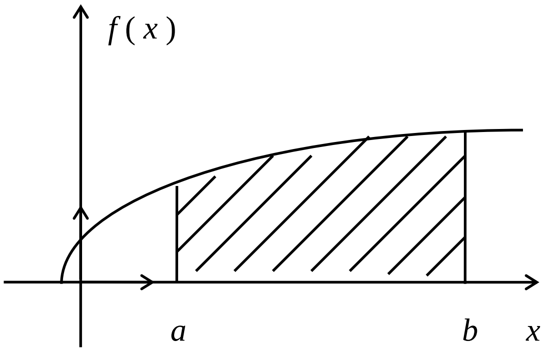
$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

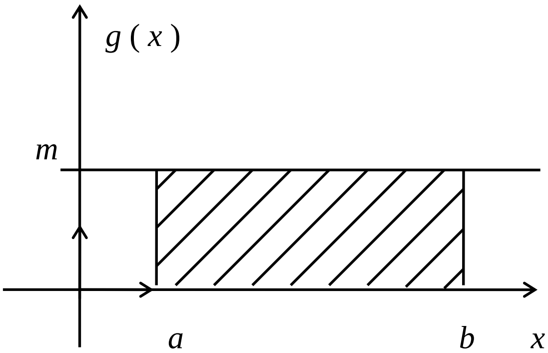
$$= \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

L’aire demandée plus haut est la différence des deux aires que l’on vient de calculer.

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{2\times 3} - \frac{1\times 2}{3\times 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Valeur moyenne





Il existe une valeur m telle que les deux aires hachurées sont égales.
On dit que m est la valeur moyenne de la fonction f sur [a ; b].
Comment calculer cette valeur moyenne ?

L'aire de droite est $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b m\,dx = [\,m\,x\,]_a^b = m\,b - m\,a = m \times (b - a)$.

On trouve la même chose en disant que c'est l'aire d'un rectangle de longueur $b - a$ et de largeur m.

L'aire de gauche est $\int_a^b f(x)\,dx$.

Les deux aires hachurées sont égales donc $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

donc $\int_a^b f(x)\,dx = m \times (b - a)$

donc $m = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Exemple</u>

La valeur moyenne de x^2 sur [0 ; 1] est $\dfrac{1}{1-0} \int_0^1 x^2\,dx = 1 \times [\,\dfrac{x^3}{3}\,]_0^1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{0}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Les deux surfaces hachurées ont donc la même aire.