Fonction logarithme népérien

<u>Définition</u> : la fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$,
définie sur] 0 ; + ∞ [, qui s'annule en 1.
On note cette fonction ln.

Propriété : la fonction ln transforme un produit en somme : ln (2 × 3) = ln (2) + ln (3).
Propriété : ln (1) = 0.

Pour connaître les variations de la fonction ln, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.
La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est positive sur] 0 ; + ∞ [.
La fonction ln est donc croissante.

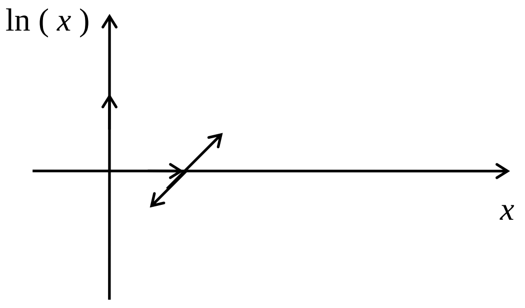
x	0		1		+ ∞
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	1	+	
$\ln(x)$		↗	0	↗	

La double barre rappelle que 0 n'a pas d'image.
ln 0 est une opération interdite.

Ce tableau montre que ln (x) est négatif si $0 < x < 1$ et que ln (x) est positif si $x > 1$.

x	0		1		+ ∞
$\ln(x)$		-	0	+	

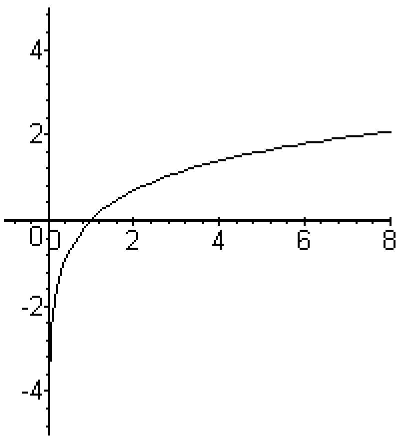
Pour $x = 1$, cette dérivée vaut 1, la représentation de ln admet donc une tangente de pente 1 au points de coordonnées (1 ; 0).



On admet <u>les limites</u> de la fonction ln.

En 0, la limite est - ∞.
En + ∞, la limite est + ∞.

Voici la représentation de la fonction ln.



Définition: e est le nombre tel que ln e = 1.
e ≈ 2,72

Remarque : la pente de la tangente au point de coordonnées (1 ; 0) a pour pente $\frac{1}{1}$ = 1.

<u>Propriétés</u>
La fonction ln transforme un produit en somme : ln (2 × 3) = ln (2) + ln (3).

On peut aussi dire que
ln (2 × 2) = ln (2) + ln (2) = 2 ln (2)
ln (2 × 2 × 2) = ln (2) + ln (2) + ln (2) = 3 ln (2).

Finalement,
$\ln (2^2) = 2 \ln (2)$
$\ln (2^3) = 3 \ln (2)$
$\ln (5^9) = 9 \ln (5)$ etc.

<u>Propriété</u> : $\ln (x^n) = n \ln (x)$, quel que soit l'entier n, quelque soit le réel positif x.

Remarque : $\ln (2 \times \frac{1}{2}) = \ln (2) + \ln (\frac{1}{2})$ et $\ln (2 \times \frac{1}{2}) = \ln (1) = 0$

donc $\ln 2 + \ln \frac{1}{2} = 0$

donc $\ln \frac{1}{2} = - \ln 2$.

<u>Propriété</u> : $\ln \frac{1}{x} = - \ln x$, quel que soit le réel strictement positif x.

$\ln (5^{-9}) = \ln \frac{1}{5^9} = -9 \ln 5$

Remarque : $\ln \frac{a}{b} = \ln (a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

Propriété : $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, quels que soient les réels positifs a et b.

Résolution d'inéquations de la forme $2^n \geq 10$ ou $3^n \leq 20$

Résoudre l'équation $2^n = 512$.

$\ln (2^n) = \ln 512 \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln 2 = \ln 512$

$\Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln 512}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow \quad n = 9$

On peut vérifier que $2^9 = 512$.

S = { 9 }

Remarque : la fonction ln est croissante donc la fonction ln conserve l'ordre :

$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \ln a \leq \ln b$

On peut donc aussi résoudre l'inéquation $3^n \leq 145$.

$\ln (3^n) \leq \ln 145 \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln 3 \leq \ln 145$

$\Leftrightarrow \quad n \leq \frac{\ln 145}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow \quad n \leq 4{,}53.$

Les solutions sont les naturels inférieurs ou égaux à 4.

S = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 }

On peut aussi résoudre l'inéquation $5^n \geq 1000$.

$\ln (5^n) \geq \ln 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln 5 \geq \ln 1000$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln 1000}{\ln 5}$

$\Leftrightarrow \quad n \geq 4{,}29.$

Les solutions sont les naturels supérieurs ou égaux à 5.

Dérivée

Attention, tout ceci n'est valable que pour les valeurs de x pour lesquelles la quantité dont on prend le logarithme est positive.

Par exemple, ln (3 x + 5) n'est défini que pour $x > -\frac{5}{3}$.

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln(2x)$	$\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$
$\ln(3x+5)$	$\frac{3}{3x+5}$
$\ln(-3x+5)$	$\frac{-3}{3x+5}$
$\ln(x^2+1)$	$\frac{2x}{x^2+1}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

Question : pourquoi la même dérivée ?

Primitives

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{-3}{3x+5}$	$\ln(-3x+5)$
$\frac{2x}{x^2+1}$	$\ln(x^2+1)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$

Exemples : donner une primitive de $f : x \longmapsto \frac{6x^2}{2x^3-4}$; $g : x \longmapsto \frac{x^2}{x^3-4}$;
$h : x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}$; $i : x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

Le logarithme décimal

Définition : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Le passage du logarithme népérien au logarithme décimal est très simple :
il suffit de diviser par ln 10.

$$\ln x \xrightarrow{\ :\ \ln 10\ } \log x$$

Propriétés

$\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$ (pour le logarithme népérien, c'est ln e = 1).

La dérivée de la fonction log

$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ donc $\log' x = \dfrac{\ln' x}{\ln 10} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln 10} = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

À part cela, toutes les propriétés de ln sont vraies pour log.
En particulier $\log 10^3 = 3 \times \log 10 = 3 \times 1 = 3$.
De même $\log 10^{-7} = -7 \times \log 10 = -7$.
Propriété : $\log 10^n = n$ quelque soit l'entier n (positif ou négatif).

Le pH

L'acidité dépend de l'activité des ions H^+.
$[H^+]$ varie de façon considérable : de 10^{-14} à 1.
Il est impossible de représenter cela sur un graphique.
Avec le logarithme cela se tasse : $\log 10^{-14} = -14$ et $\log 1 = 0$.
$\log [H^+]$ varie de - 14 à 0. C'est beaucoup plus pratique.
Avec des nombres positifs, c'est encore plus pratique.
Définition : $pH = -\log [H^+]$.

Si la concentration en ions H^+ est 10^{-7}, alors pH = 7.
Si la concentration en ions H^+ est 10^{-4}, alors pH = 4.
Si la concentration en ions H^+ est 10^{-10}, alors pH = 10.

Démonstration

Pourquoi la fonction logarithme népérien transforme-t-elle un produit en somme ?

Cherchons une fonction qui transforme un produit en somme, c'est-à-dire une fonction f qui vérifie $f(xy) = f(x) + f(y)$ quels que soient les nombres x et y.

On trouve facilement que par une telle fonction, l'image de 1 est 0 :

Si $f(xy) = f(x) + f(y)$ quels que soient les nombres x et y,
alors $f(2 \times 1) = f(2) + f(1)$
alors $f(2) = f(2) + f(1)$
alors $\underline{f(1) = 0}$.

Dérivons la fonction $g : x \longmapsto f(xy)$.

$g'(x) = y f'(xy)$.

Dérivons d'une autre façon la fonction g.

$g(x) = f(xy) = f(x) + f(y)$
donc $g'(x) = f'(x) + f'(y)$
Pour la variable x, $f(y)$ est une constante donc sa dérivée est nulle
donc $g'(x) = f'(x)$.

On se souvient que $g'(x) = y f'(xy)$,

et on en déduit que $f'(x) = y f'(xy)$ et que $f'(xy) = \frac{1}{y} f'(x)$.

On démontre de la même façon que $f'(xy) = \frac{1}{x} f'(y)$.

En remplaçant y par 1, on trouve $f'(x \times 1) = \frac{1}{x} f'(1)$.

En posant $f'(1) = \alpha$, cela donne $f'(x) = \frac{\alpha}{x}$.

Une fonction f qui transforme un produit en somme est donc une fonction dont la dérivée est du type $f' : x \longmapsto \frac{\alpha}{x}$ où α est un réel.

Une fonction f qui transforme un produit en somme est donc une primitive de $f' : x \longmapsto \frac{\alpha}{x}$ où α est un réel.

L'ensemble de définition de $f' : x \longmapsto \frac{\alpha}{x}$ est $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. En terminale on ne sait trouver des primitives qu'aux fonctions définies sur un intervalle, on va donc se restreindre à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; +\infty[$, une fonction f qui transforme un produit en somme est donc une primitive de $f' : x \longmapsto \frac{\alpha}{x}$.

On a vu plus haut que, pour une fonction f qui transforme un produit en somme, $f(1) = 0$.

Finalement, sur $]0 ; +\infty[$, une fonction f qui transforme un produit en somme est la primitive de $f' : x \longmapsto \frac{\alpha}{x}$ telle que $f(1) = 0$.

Parmi toutes ces fonctions, on choisit celle qui correspond à $\alpha = 1$.

On appelle cette fonction « logarithme népérien » et elle transforme un produit en somme.