Le schéma de Bernoulli
La loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui peut donner deux résultats. Par exemple

- lancer une pièce; on peut obtenir pile ou face.
- lancer un dé; on peut obtenir 6 ou autre chose.
- jouer au loto; on peut gagner ou ne pas gagner.

On peut appeler les deux résultats « succès » et « échec ».
On appelle souvent p la probabilité d'un succès et q la probabilité d'un échec ($q = 1 - p$).

Une pièce

Pour un lancer de pièces, $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$.

Pour un lancer de dés, si un succès est l'obtention d'un six, $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$.

Trois pièces

On peut répéter une épreuve de Bernoulli, par exemple en lançant trois pièces.
On compte le nombre de succès : soit F la variable aléatoire égale au nombre de pièces qui tombent sur face.
Donnons la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

n	0	1	2	3
P (F = n)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On dit que la variable aléatoire F suit une loi binomiale.
Il y a plusieurs lois binomiales, celle-ci s'appelle B (3 ; $\frac{1}{2}$).

* B comme binomiale car on répète des expérience à deux issues : *pile* et *face* (on peut aussi dire *succès* et *échec*)
* ces expériences sont identiques et indépendantes
* 3 car on répète trois fois cette expérience
* $\frac{1}{2}$ car, chaque fois qu'on lance une pièce, la probabilité d'avoir face est $p = \frac{1}{2}$.

Les trois expériences successives sont identiques car chaque pièce a la même probabilité de tomber sur *pile* et la même probabilité de tomber sur *face*.

Les trois expériences successives sont indépendantes car le résultat d'une expérience ne dépend pas du résultat des expériences précédentes : la probabilité d'avoir *face* est la même si la première pièce a donné *pile* ou si la première pièce a donné *face* (les pièces et les dés n'ont pas de mémoire).

Définition : Quand on répète n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, le nombre de succès peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 et n.
Ce nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Trois dés
On lance trois dés et on compte le nombre de six.
Soit S la variable aléatoire égale au nombre de six.
Cette variable aléatoire suit la loi binomiale B (3 ; $\frac{1}{6}$).
Disons qu'obtenir 6 est un succès et disons qu'obtenir autre chose que 6 est un échec.
On peut donc donner la loi de probabilité de la variable aléatoire S :

n	0	1	2	3
P (S = n)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

On dit que la variable aléatoire S suit la loi binomiale B (3 ; $\frac{1}{6}$) car, à chaque lancer de dé, la probabilité d'un succès (avoir un six) est $p = \frac{1}{6}$.

Remarque : on fait trois tentatives avec, à chaque fois une probabilité de succès de $\frac{1}{6}$. On peut donc espérer avoir $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ succès. On dit que l'espérance de cette variable aléatoire est $\frac{1}{2}$.
Cela signifie que si l'on lance 1 000 fois trois dés, on aura environ 500 fois le 6.
Propriété : l'espérance de la loi B (n , p) est $n \times p$.
Propriété : l'écart type de la loi B (n , p) est $\sqrt{n \times p \times q}$.
L'écart type mesure la dispersion.
Le carré de l'écart type s'appelle la variance.
Si S est la variable aléatoire égale au nombre de 6 lors du lancer de trois dés,

$$E (S) = n \times p = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma (S) = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 0{,}65.$$

On peut envisager beaucoup d'autres situations décrites par une loi binomiale :
* Quelle est la probabilité d'avoir deux garçons dans une famille de trois enfants ?
* Chaque malade a neuf chances sur dix de guérir. Quelle est la probabilité que, parmi trois malades, un seul guérisse ?

Dans toutes ces situations, on répète des expériences à deux issues (succès et échec) identiques et indépendantes.
Ensuite, on compte le nombre de succès et on dit que la variable aléatoire égale au nombre de succès suit une loi binomiale.

Exemples de variables aléatoires qui ne suivent pas une loi binomiale

Exemple : on lance trois dés et on s'intéresse au plus grand des trois numéros.
Il y a bien répétition d'expériences à deux issues identiques et indépendantes mais on ne compte pas le nombre de succès.

Exemple : le problème des tirages sans remise
Une classe de 30 élèves contient autant de garçons que de filles. On choisit quatre élèves pour nettoyer la salle et on compte le nombre de garçons parmi les quatre élèves choisis.
Une expérience consiste à choisir un élève dans cette classe.
Il y a bien répétition d'expériences à deux issues mais ces expériences ne sont pas identiques.
En effet, lors de la première expérience, la probabilité d'avoir un garçon est $\frac{1}{2}$.
Si le premier choisi est
- un garçon, la probabilité d'avoir un garçon en deuxième est $\frac{14}{29} \approx 0{,}48$.
- une fille, la probabilité d'avoir un garçon en deuxième est $\frac{15}{29} \approx 0{,}52$.

La première expérience n'a pas la même loi de probabilité que la deuxième donc les expériences ne sont pas identiques.

Exemple : pour un sondage on interroge un échantillon de 1 000 personnes dans une population de 40 000 000 personnes.
60 % de la population répond « oui » et le reste répond « non ».
On compte le nombre de sondés ayant répondu « oui ».
On rencontre le même problème qu'avec l'exemple précédent mais...
La probabilité que le premier sondé réponde « oui » est 0,6.
Si le premier sondé a répondu

- « oui », la probabilité d'avoir un « oui » en deuxième est

$\frac{23.999.999}{39.999.999} \approx 0{,}599\ 999\ 998\ 999\ 999\ 975$.

- « non », la probabilité d'avoir un « oui » en deuxième est

$\frac{24.000.000}{39.999.999} \approx 0{,}600\ 000\ 015\ 000\ 000\ 375$.

Ces nombres différents mais tellement proches de 0,6 qu'on peut considérer que la deuxième expérience a la même loi de probabilité que la première.
On peut considérer qu'un sondage suit une loi de Bernoulli chaque fois que la taille de l'échantillon est très inférieure à la taille de la population.
Ici les paramètres sont $n = 1\ 000$ et $p = 0{,}6$.

Exemple : la probabilité pour un nouveau-né d'être un garçon est 52 %.
Quelle est la probabilité qu'il y ait deux garçons dans une famille de trois enfants ?

Appelons « succès » la naissance d'un garçon et « échec » la naissance d'une fille, ou le contraire si vous préférez.
Les trois naissances sont trois expériences. Chaque expérience peut conduire à un succès ou à un échec.
La probabilité d'un succès est $p = 0{,}52$, la probabilité d'un échec est $q = 1 - p = 0{,}48$.
Cela est vrai pour l'aîné et aussi pour les enfants suivants. Les trois expériences sont donc identiques.
Lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon ne dépend pas des naissances précédentes (sauf pour les vrais jumeaux), les trois expériences successives sont donc indépendantes.
Le nombre de garçons dans cette famille suit donc la loi B (3 ; 0,52).
La probabilité d'avoir deux garçons et une fille est donc $P (G = 2) \approx 0{,}39$.

Remarque : on fait trois tentatives avec, à chaque fois une probabilité de succès de 0,52. On peut donc espérer avoir $3 \times 0{,}52 = 1{,}56$ succès. On dit que l'espérance de cette variable aléatoire est 1,56.
$E (G) = n \times p = 3 \times 0{,}52 = 1{,}56$
$\sigma (S) = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{3 \times 0{,}52 \times 0{,}48} \approx 0{,}87$.