Les lois exponentielles

Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

si $P\ (T \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x} dx$.

<u>Propriété</u> : $P\ (T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

<u>Démonstration</u> : La dérivée de $f : x \longmapsto e^{-\lambda x}$ est $f' : x \longmapsto -\lambda\, e^{-\lambda x}$
donc une primitive de $f : x \longmapsto -\lambda\, e^{-\lambda x}$ est $F : x \longmapsto e^{-\lambda x}$
donc une primitive de $f : x \longmapsto \lambda\, e^{-\lambda x}$ est $F : x \longmapsto -e^{-\lambda x}$

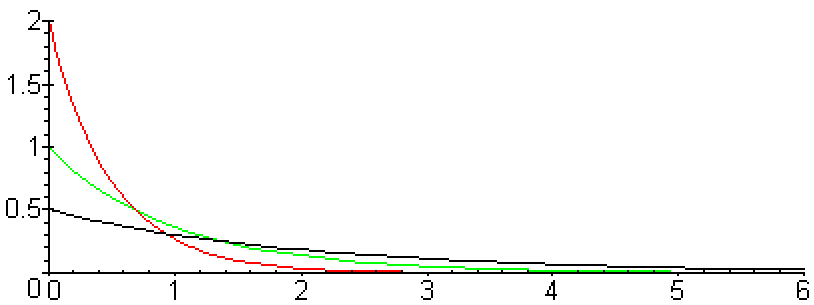
donc $P\ (T \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}$.

<u>Remarque</u> : quelle que soit la valeur de λ, $P\ (T < +\infty) = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{+\infty}$

$= 0 - (-e^0) = 1$, ce qui est le résultat attendu.

La durée de vie d'un atome radioactif suit une loi exponentielle.
La durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure (taux de désintégration ou taux d'avarie constant) suit une loi exponentielle.

Voici les représentation de $x \longmapsto e^{-x}$ $(\lambda = 1)$
$x \longmapsto 2\, e^{-2x}$ ($\lambda = 2$, durée de vie plus courte)
$x \longmapsto \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}x}$ ($\lambda = \frac{1}{2}$, durée de vie plus longue).



Exemple : la durée de vie (en jours) d'un atome radioactif suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0866$.
Quelle est la probabilité que cet atome radioactif soit désintégré en moins de 20 jours ?

Cette probabilité est $\int_0^{20} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \times 20} = 1 - e^{-0{,}0866 \times 20} = 0{,}823$.

Exemple : la durée de vie (en années) d'un atome radioactif suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0000122 = 1{,}22 \times 10^{-4}$.
Quelle proportion de ce produit radioactif subsistera après 2000 ans ?

La proportion désintégrée est $\int_0^{2000} \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-2000 \times \lambda} = 1 - e^{-0{,}244} = 0{,}317$.
La proportion restante est donc 0,683.

Remarque : $\lambda = 0{,}0866$ correspond à l'iode 131 dont la période est 8 jours.
$\lambda = 1{,}22 \times 10^{-4}$ correspond au carbone 14 dont la période est 5700 ans.
Exercice : montrer que si la période est T, alors $\lambda = \frac{1}{T} \ln 2$.

Espérance et écart-type d'une loi exponentielle

Remarque : si λ est grand, alors le vieillissement est rapide et l'espérance est faible.
réciproquement, si λ est petit, alors le vieillissement est lent et l'espérance est grande.

Propriété : l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est $\frac{1}{\lambda}$.

Démonstration (facultative)
Rappel: si la densité d'une variable aléatoire est f,
alors l'espérance de cette variable aléatoire est $\int_0^{+\infty} x\, f(x)\,dx$.
Pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle,
cela donne $E(X) = \int_0^{+\infty} x\,\lambda\, e^{-\lambda x}\,dx$.
Une primitive de $f : x \longmapsto x\,\lambda\, e^{-\lambda x}$ est $F : x \longmapsto -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$.
Vous pouvez vérifier en dérivant mais vous n'avez pas de méthode pour trouver cette primitive.
cela donne, $E(X) = \left[-\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ donc
Finalement $E(X) = 0 + \left(0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \times 0} = \frac{1}{\lambda}$.

Propriété : l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est $\frac{1}{\lambda}$.

Propriété : la variance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est $\frac{1}{\lambda^2}$.