Les lois exponentielles

Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

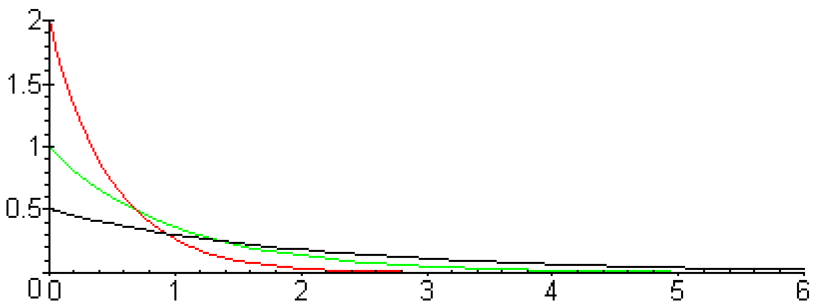
<u>Propriété</u> : $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

<u>Démonstration</u> : La dérivée de $f : x \mapsto e^{-\lambda x}$ est $f' : x \mapsto -\lambda e^{-\lambda x}$
donc une primitive de $f : x \mapsto -\lambda e^{-\lambda x}$ est $F : x \mapsto e^{-\lambda x}$
donc une primitive de $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est $F : x \mapsto -e^{-\lambda x}$
donc $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}$.

<u>Remarque</u> : $P(T < +\infty) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = 0 - (-e^0) = 1$, ce qui est le résultat attendu.

La durée de vie d'un atome radioactif suit une loi exponentielle.
La durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure (taux de désintégration ou taux d'avarie constant) suit une loi exponentielle.

Voici les représentation de $x \mapsto e^{-x}$ $(\lambda = 1)$
$x \mapsto 2e^{-2x}$ ($\lambda = 2$, durée de vie plus courte)
$x \mapsto \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$ ($\lambda = \frac{1}{2}$, durée de vie plus longue).



Exemple : la durée de vie (en jours) d'un atome radioactif suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0866$.
Quelle est la probabilité que cet atome radioactif soit désintégré en moins de 20 jours ?

Cette probabilité est $\int_0^{20} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \times 20} = 1 - e^{-0{,}0866 \times 20} = 0{,}823$.

Exemple : la durée de vie (en années) d'un atome radioactif suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0000122 = 1{,}22 \times 10^{-4}$.
Quelle proportion de ce produit radioactif subsistera après 2000 ans ?

La proportion désintégrée est $\int_0^{2000} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-2000 \times \lambda} = 1 - e^{-0{,}244} = 0{,}317$.
La proportion restante est donc 0,683.

Remarque : $\lambda = 0{,}0866$ correspond à l'iode 131 dont la période est 8 jours.
$\lambda = 1{,}22 \times 10^{-4}$ correspond au carbone 14 dont la période est 5700 ans.
Exercice : montrer que si la période est T, alors $\lambda = \frac{1}{T} \ln 2$.

Espérance d'un loi exponentielle

Remarque : si λ est grand, alors la durée de vie est courte est rapide et l'espérance est faible.
réciproquement, si λ est petit, alors la durée de vie est longue et l'espérance est grande.

Propriété : l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est $\frac{1}{\lambda}$.

Démonstration (facultative)
Rappel: si la densité d'une variable aléatoire est f,
alors l'espérance de cette variable aléatoire est $\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$.
Pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle,
cela donne $E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$.
Une primitive de $f : x \mapsto x \lambda e^{-\lambda x}$ est $F : x \mapsto -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$.
Vous pouvez vérifier en dérivant mais vous n'avez pas de méthode pour trouver cette primitive.
cela donne, $E(X) = \left[-\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$
$\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ donc
Finalement $E(X) = 0 + \left(0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \times 0} = \frac{1}{\lambda}$.