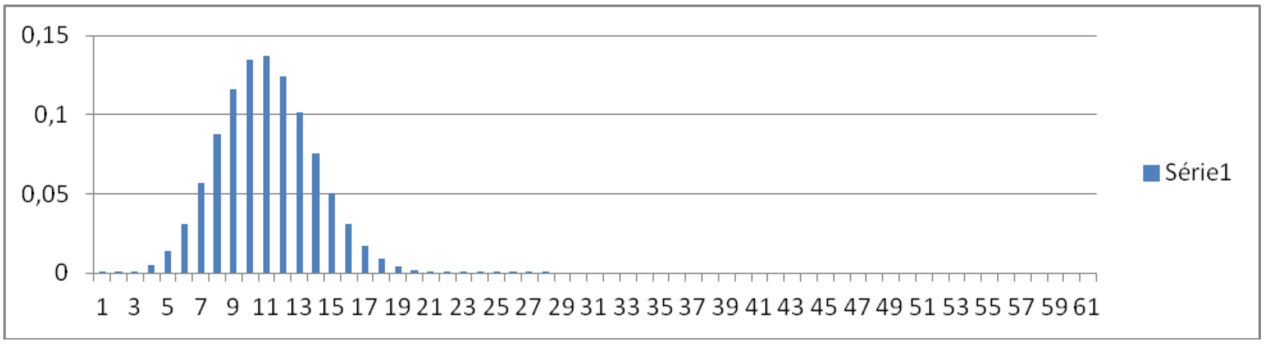
Loi normale

On lance 60 fois un dé normal et on compte le nombre de 6 (on dit que X est la variable aléatoire égale au nombre de 6 sortis lors de ces 60 lancers).

$P (X = 5) \approx 0{,}03$; $P (X = 10) \approx 0{,}13$; $P (X = 22) \approx 10^{-4}$ etc.



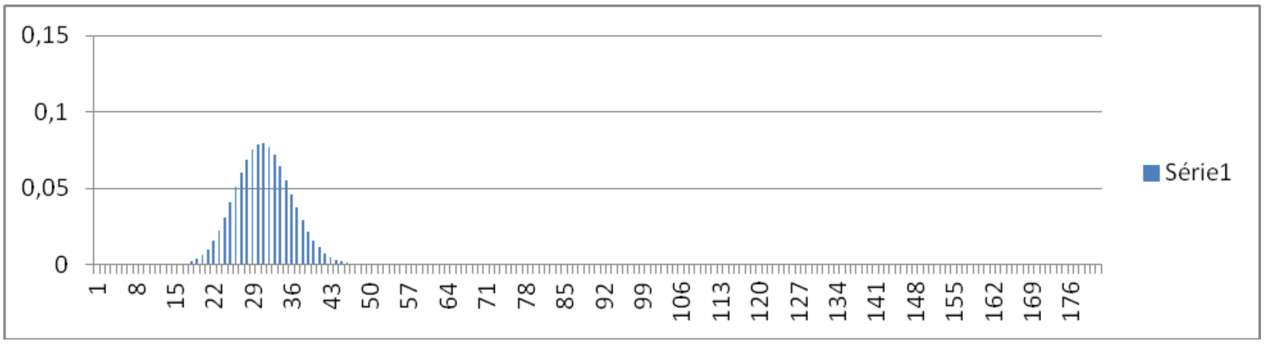
La valeur la plus probable de X est 10. $P (X = 10) \approx 0{,}137$.
Les valeurs proches de 10 ont une probabilité un peu inférieure à $P (X = 10)$.
Les valeurs éloignées de 10 ont une probabilité très faible.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$.

L'espérance de cette loi binomiale est $E (X) = n\, p = 60 \times \frac{1}{6} \approx 10$.

Cela signifie qu'en moyenne, quand on lance 60 dés normaux, on trouve 10 fois le 6.

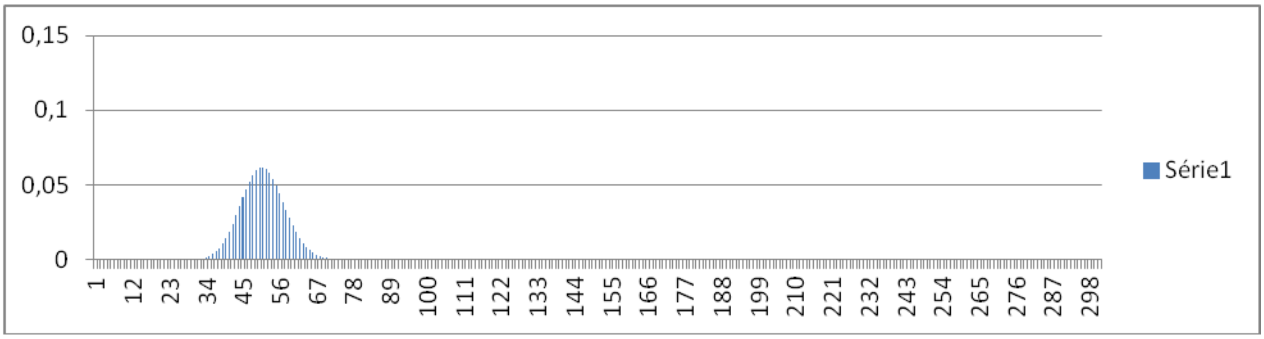
Voici ce qu'on obtient avec $n = 180$ lancers.



X suit la loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{1}{6}$.

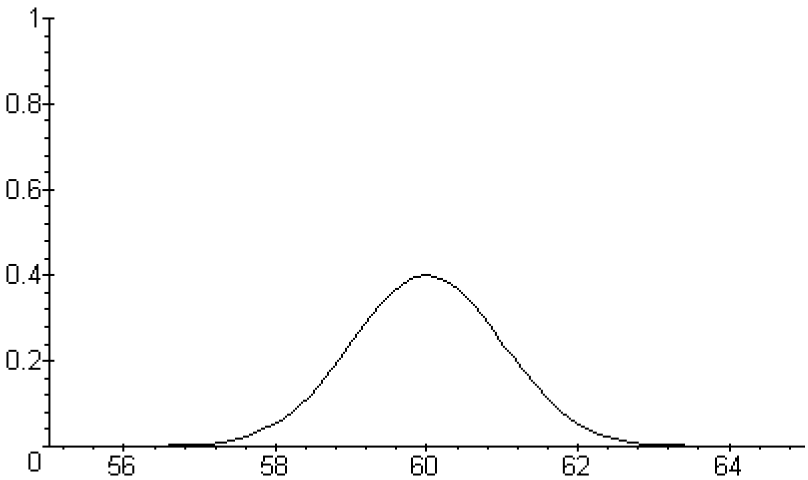
L'espérance est $E (X) = n\, p = 180 \times \frac{1}{6} = 30$.

Avec $n = 300$:



On imagine ce qui se passe quand *n* augmente. Les points qui sont aux sommets des bâtons sont très proches et on se rapproche d'une courbe en cloche.

Certains phénomènes sont décrits par une telle courbe. On dit qu'ils suivent une loi normale.
L'exemple classique est l'erreur de fabrication.
Une machine doit verser 60 cl dans un récipient mais il peut arriver qu'elle verse un peu plus ou un peu moins.
On s'intéresse à la variable aléatoire égale au volume versé.

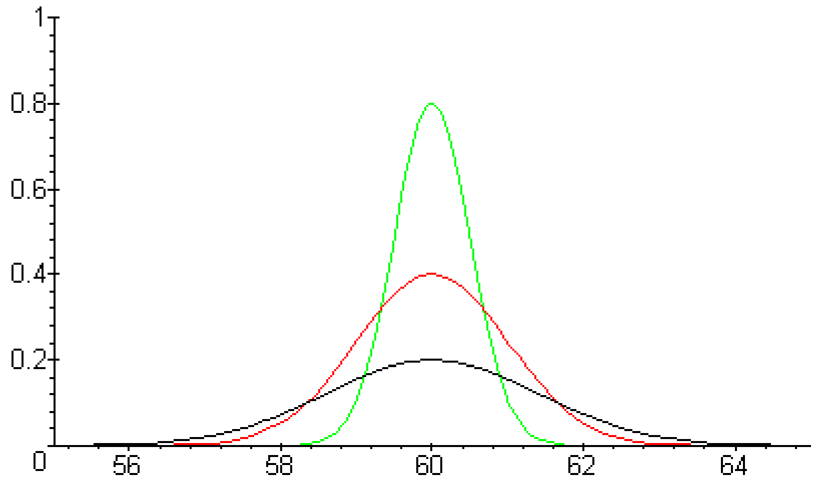


La valeur la plus probable est 60. On dit que c'est l'espérance de la variable aléatoire égale au volume versé.

On note $\mu = 60$.

Si la machine est plus précise, les grosses erreurs sont moins probables et l'on obtient une cloche plus étroite.

Dans le cas contraire, la cloche est plus large.



La différence entre ces trois situations est la dispersion.
La cloche étroite correspond à une petite dispersion.
Habituellement, on décrit la dispersion d'une variable aléatoire par son <u>écart-type</u>.

La plus étroite de ces trois courbes correspond à un écart-type $\sigma = \frac{1}{2}$.
La moins étroite de ces trois courbes correspond à un écart-type $\sigma = 2$.
L'autre courbe correspond à un écart-type $\sigma = 1$.

Une loi normale est entièrement décrite par son espérance et par son écart-type.
Si vous donnez ces renseignements à votre calculette, elle calculera tout ce qu'il vous faut.

<u>Exemple</u>
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 4.
Donner $P (2 \leq X \leq 10)$.
<u>Calculette TI</u>
On cherche dans le menu *Distribution* l'instruction *normalFRép*.
On donne à la calculette tout ce qu'elle demande et on trouve
<u>Calculette Casio</u>
MENU   STAT   DIST (F5)   NORM (F1)   Ncd (F2)
Régler Data sur Var (F2)
On donne à la calculette tout ce qu'elle demande.
Sur les calculettes anciennes, il faut taper les renseignements dans l'ordre suivant :
borne inférieure , borne supérieure , écart-type , moyenne.
On descend jusqu'à Exécuter puis CALC (F1) et on trouve

$P (2 \leq X \leq 10) \approx 0{,}6677$.

<u>Approximation d'une loi binomiale par une loi normale</u>
Rappel : si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors
l'espérance de X est $E (X) = n\,p$.
l'écart-type de X est $\sigma = \sqrt{npq}$.

Nous avons vu que si *n* est grand, alors une loi binomiale est proche d'une loi normale.
Oui, mais de quelle loi normale ?
Exemple : on lance 60 fois un dé normal et on compte le nombre de 6.

Le nombre de 6 suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$.

$E (X) = n\,p = 10$ et $\sigma (X) = \sqrt{npq} \approx 2{,}89$.

Une approximation de la loi binomiale X est la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 2,89.
Voilà, c'est toujours comme ça, il suffit de trouver l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale.

Intervalle de fluctuation

Vérifiez à la calculette qu'avec n'importe quelle loi normale,

$P (\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}68$.

$P (\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}95$.

$P (\mu - 3\,\sigma \leq X \leq \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}997$.

La probabilité que X soit distant de son espérance de plus de trois écarts-types est très faible : environ 0,3 %.