La loi uniforme

1/ Le temps d'attente

Après le lycée, vous traînez un peu : bavardage, grignotage etc. Ensuite vous allez prendre le métro. Le métro passe toutes les cinq minutes.

Quelle est la probabilité que vous attendiez votre métro
- moins d'une minute ?
- plus de trois minutes ?
- plus d'une heure ?
- moins d'une seconde ?
- entre deux et trois minutes ?
- cinq minutes ou moins ?
- deux minutes ?

Soit T le temps d'attente en minutes.

$P(T \leq 1) = \frac{1}{5}$

$P(T \geq 3) = \frac{2}{5}$

$P(T \geq 60) = 0$

$P(T \leq \frac{1}{60}) = \frac{1}{300}$

$P(2 \leq T \leq 4) = \frac{2}{5}$

$P(T \leq 5) = 1$

$P(T = 2) = 0.$

Vous êtes allé prendre un verre et vous avez bavardé très longtemps. Le métro ne passe maintenant que tous les quarts d'heure.

Répondez aux mêmes questions.

Il faut une minute pour aller du bistrot à la station de métro. Considérons le temps d'attente en ajoutant cette minute.

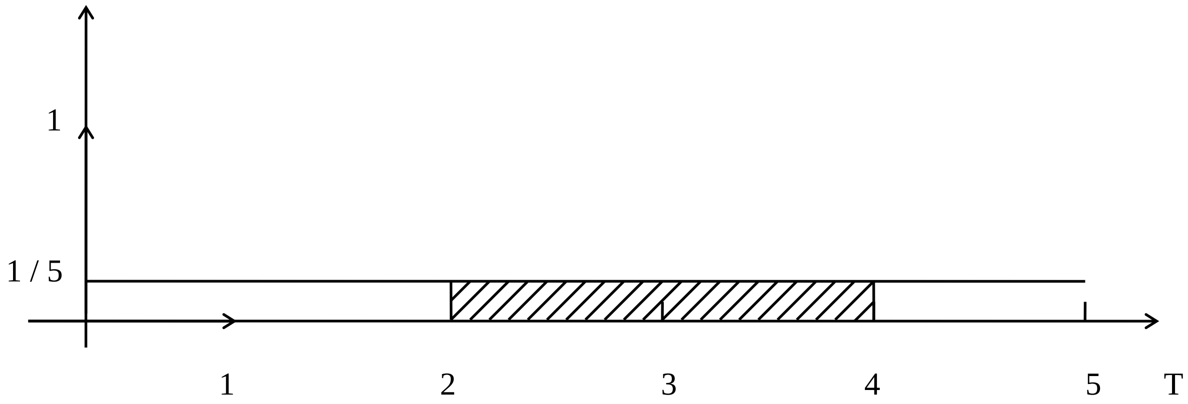
Répondez aux mêmes questions.

T est une variable aléatoire. Comment donner sa loi de probabilité ? Comment donner son espérance ?

Interprétation graphique

<u>Pour le métro qui passe toutes les cinq minutes</u>

On représente la fonction $x \longmapsto \frac{1}{5}$ (on verra plus tard pourquoi on choisit $\frac{1}{5}$).

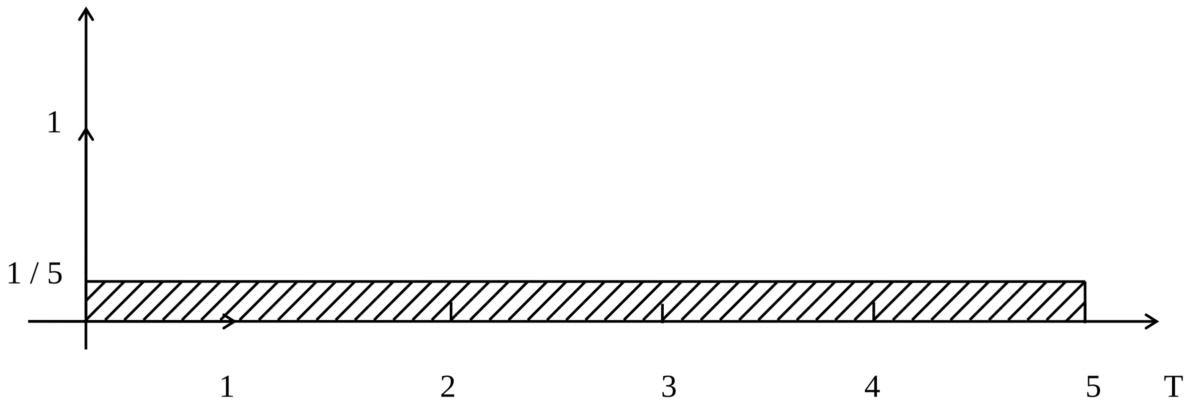


La surface hachurée est un rectangle de 2 sur $\frac{1}{5}$. Son aire est $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

La surface hachurée est $P(2 \leq T \leq 4) = \frac{2}{5}$.

Pourquoi $\frac{1}{5}$?

Le temps d'attente est certainement inférieur à 5,
donc $(T \leq 5)$ est un événement certain,
donc $P(T \leq 5) = 1$.



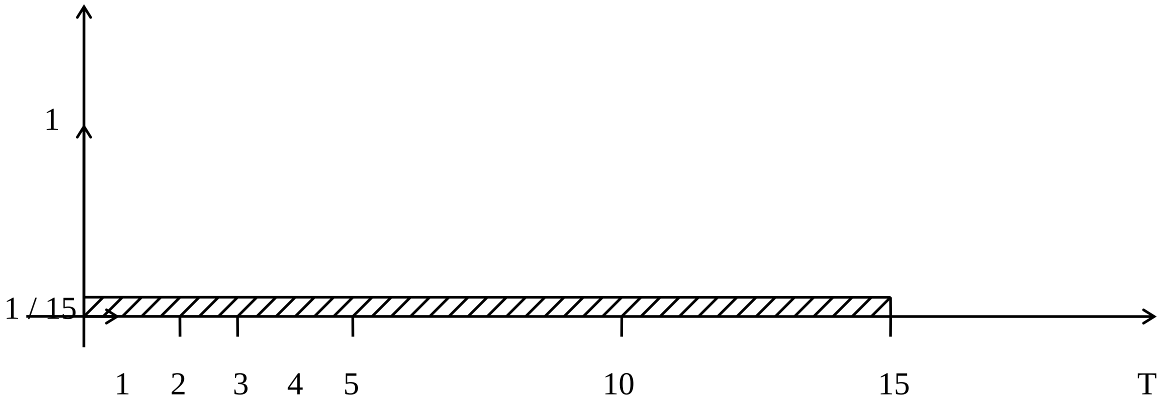
La surface hachurée est un rectangle de 5 sur $\frac{1}{5}$. Son aire est $5 \times \frac{1}{5} = 1$.

La surface hachurée est $P(T \leq 5) = 1$.

Si on avait choisi un autre nombre que $\frac{1}{5}$, cela ne marcherait pas.

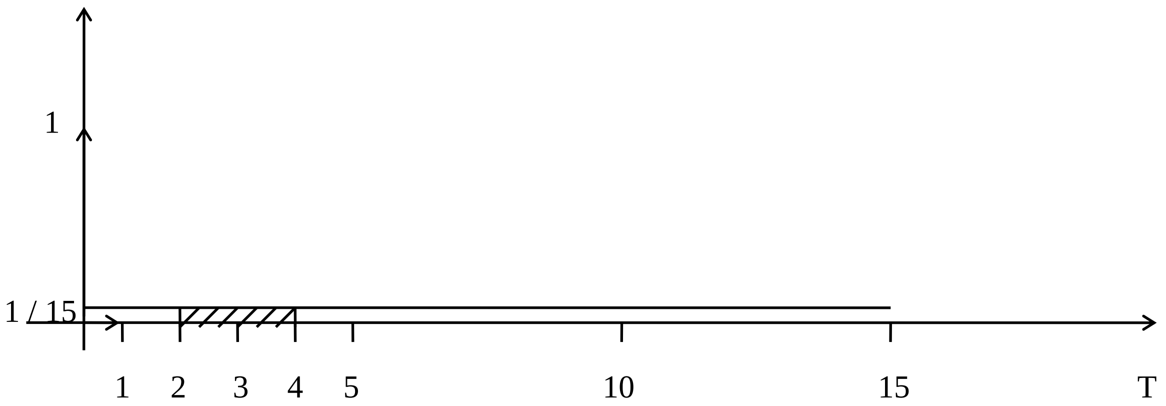
Pour le métro qui passe tous les quarts d’heure

On représente la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{15}$

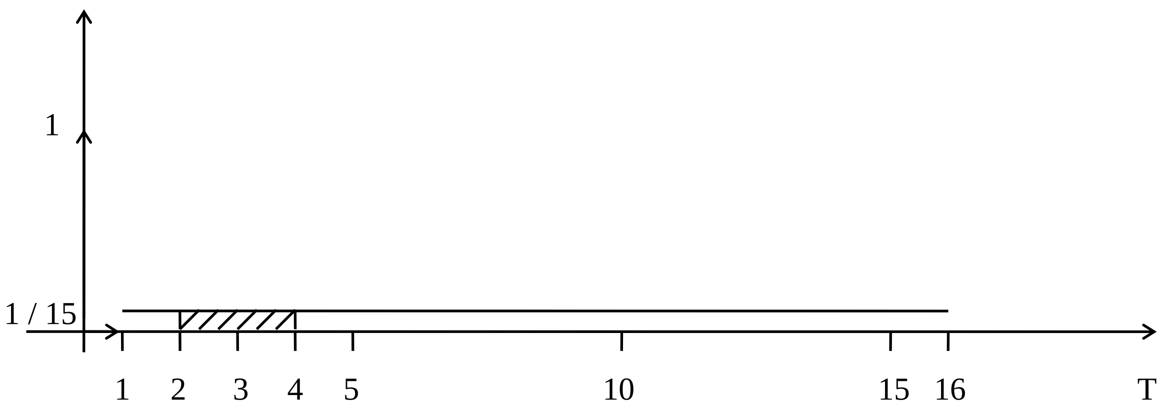


L’aire hachurée est $P (T \le 15) = \dfrac{1}{15} \times 15 = 1$.

De même, $P (2 \le T \le 4) = \dfrac{1}{15} \times 2 = \dfrac{2}{15}$:



Si l’on ajoute la minute de trajet entre le bistrot et la station de métro, la durée de l’attente est comprise entre 1 minute et 16 minutes et $P (2 \le T \le 4) = \dfrac{1}{15} \times 2 = \dfrac{2}{15}$:



2/ Deux types de variables aléatoires

Les variables aléatoires discrètes

Lorsqu'on lance deux dés, le numéro peut prendre six valeurs.
Chacune de ces valeurs a une probabilité qui est indiquée dans le tableau. C'est ainsi qu'on donne la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
Pour une variable aléatoire qui prend 10 valeurs ou 50 valeurs, la méthode est la même.
Une variable aléatoire qui prend un nombre fini de valeurs est une variable aléatoire discrète.

Une variable aléatoire continue : la durée de l'attente

Pour le temps d'attente, la variable aléatoire (la durée de l'attente) peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 5.
Comme il y a une infinité de nombres dans l'intervalle [0 ; 5], la variable aléatoire peut prendre une infinité de valeurs différentes. On ne peut plus indiquer sa loi de probabilité dans un tableau.
Une telle variable aléatoire est continue.

La variable aléatoire égale au temps d'attente possède une propriété intéressante :

$P(2 \leq T \leq 4) = P(T \in [2 ; 4]) = \frac{2}{5}$.

$P(T \in [0 ; 2]) = P(T \in [1 ; 3]) = P(T \in [2 ; 4]) = P(T \in [3 ; 5]) = \frac{2}{5}$.

Tous les intervalles d'amplitude 2 ont la même probabilité.
Il en va de même pour les intervalles d'amplitude 1, les intervalles d'amplitude 3 etc.
Une telle loi est uniforme.

Comme indiqué plus haut, la probabilité qu'une variable aléatoire appartienne à un certain intervalle est l'aire d'une surface comprise sous une droite bien choisie.

D'autres loi de probabilité continues ne sont pas uniformes. Les probabilités sont les aires de surfaces comprises non pas sous une droite mais sous une courbe.

3/ Et l'espérance ?

Si je prends le métro très souvent, je peux chercher à connaître le temps d'attente moyen.

La loi est uniforme et j'attends entre 0 et 5 minutes. L'attente moyenne est donc la moyenne de 0 et de 5. L'attente moyenne est $\frac{0+5}{2}$ = 2,5 minutes.
On dit que l'espérance de la variable aléatoire T est E (T) = 2,5 minutes.

Quand le métro passe tous les quarts d'heure, l'espérance d'attente est la moyenne entre 0 et 15, c'est-à-dire 7,5 minutes.

Si j'ajoute la durée du trajet d'une minute entre le bistrot et la station de métro, l'espérance d'attente est la moyenne entre 1 et 16, c'est-à-dire 8,5 minutes.

Pour les amateurs de formules, l'espérance de la loi uniforme sur [a ; b] est $\frac{a+b}{2}$.

4/ La dispersion : variance et écart-type

Pour avoir une grande dispersion, il suffit que l'intervalle [a ; b] soit grand, c'est-à-dire que b - a soit grand.
La variance de la loi uniforme sur [a ; b] est $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.
L'écart-type est la racine de la variance, c'est-à-dire $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

5/ Simulation sur tableur

L'instruction Alea ( ) donne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, à condition de ne pas taper d'espace.
Si l'on demande beaucoup de ces nombres, leur répartition suit une loi uniforme.
Cette instruction permet donc de simuler la loi uniforme sur [0 ; 1].

Pour la loi uniforme sur [0 ; 2], il suffit de multiplier chacun de ces nombres par 2.
2 * Alea ( ) simule la loi uniforme sur [0 ; 2].

Pour la loi uniforme sur [5 ; 7], il suffit d'ajouter 5.
5 + 2 * Alea ( ) simule la loi uniforme sur [5 ; 7].

3 + 7 * Alea ( ) simule la loi uniforme sur [3 ; 10].

etc.