Le modèle de Leontief

Comme toute activité humaine, la production d'énergie nécessite... de l'énergie. La quantité d'énergie nécessaire pour produire l'équivalent énergétique d'un baril de pétrole dépend de la technique utilisée et du lieu de production.

Avec l'huile de schiste, on consomme un baril de pétrole pour en produire cinq. On pourra donc en livrer quatre pour la consommation finale.

1/ Si l'on produit avec de l'huile de schiste l'équivalent de 1.000 barils de pétrole, combien en livrera-t-on pour la consommation finale ?

2/ Combien de barils de pétrole faut-il produire pour en livrer 1.000 ?

1/ Avec l'huile de schiste, on consomme un baril de pétrole pour en produire cinq. On consomme donc $\frac{1}{5}$ = 0,2 baril pour en produire 1.

On livre donc $1.000 - 0{,}2 \times 1.000 = 800$ barils.

<u>Si l'on produit avec de l'huile de schiste l'équivalent de 1.000 barils de pétrole, on en livrera 800 pour la consommation finale.</u>

Cela s'écrit $p - a\,p = c$ où

$p = 1.000$ est la production,

$a = 0{,}2$ est le coefficient de consommation intermédiaire,

$c = 800$ est la consommation finale.

On vérifie : $1.000 - 0{,}2 \times 1.000 = p - a\,p = c = 800$.

2/ On va encore utiliser l'écriture $p - a\,p = c$, avec une différence.

À la question précédente p est connue et on cherche c.

Ici c'est le contraire, $c = 1.000$ est connue et on cherche p.

$p - a\,p = c$ devient $p - 0{,}2\,p = 1.000$.

Il ne reste plus qu'à résoudre : $p - 0{,}2\,p = 1.000$

$$\Leftrightarrow\ p\,(1 - 0{,}2) = 1.000$$
$$\Leftrightarrow\ p = \frac{1.000}{0{,}8}$$
$$\Leftrightarrow\ p = 1.250.$$

<u>Pour livrer 1.000 barils, il faut en produire 1.250.</u>

N. B. Avec l'huile de schiste, on consomme vraiment un baril de pétrole pour en produire cinq. Voir ici http://energie-developpement.blogspot.com/2012/10/EROEI-taux-retour-energetique.html

Voir en particulier ce tableau

Taux de retour énergétique de quelques sources d'énergie (ou EROEI en anglais : *Energy Returned On Energy Invested*)

Énergie	**EROEI**
Biodiesel	1.3
Sable bitumineux	3
Huile de schiste	5
Solaire photovoltaïque	6.8
Nucléaire	10
Hydrocarbures	14.5
Éolien	18
Charbon	80
Hydroélectrique	100

Exercice tiré du Transmath, page 277

Une usine produit du fioul et de l'électricité.

Pour produire 1 € d'électricité, l'usine consomme 0,10 € d'électricité et 0,55 € de fioul.

Pour produire 1 € de fioul, l'usine consomme 0,20 € d'électricité et 0,05 € de fioul.

1/ Si l'usine produit 500.000 € d'électricité et 400.000 € de fioul, quelle quantité d'électricité et de fioul livrera-t-elle ?

2/ Quelle quantité d'électricité et de fioul doit-on produire pour livrer 600.000 € d'électricité et 250.000 € de fioul ?

1/ Pour produire 500.000 € d'électricité et 400.000 € de fioul, on consomme
$0,10 \times 500.000 + 0,20 \times 400.000$ € d'électricité.

On livre donc $500.000 - 0,10 \times 500.000 - 0,20 \times 400.000 = 370.000$ € de d'électricité.

De même on livre $400.000 - 0,55 \times 500.000 - 0,05 \times 400.000 = 105.000$ € de fioul.

Finalement, quand l'usine produit 500.000 € d'électricité et 400.000 € de fioul, elle livre 370.000 € d'électricité et 105.000 € de fioul.

On peut aussi faire un calcul matriciel :

Sous forme matricielle, cela s'écrit $\begin{pmatrix} 500.000 \\ 400.000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 \\ 0,55 & 0,05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500.000 \\ 400.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 370.000 \\ 105.000 \end{pmatrix}$.

On peut aussi l'écrire $P - AP = C$ où

$P = \begin{pmatrix} 500.000 \\ 400.000 \end{pmatrix}$ est la matrice de production,

$A = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 \\ 0,55 & 0,05 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation intermédiaire,

$C = \begin{pmatrix} 370.000 \\ 105.000 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation finale.

On conclut de même que quand l'usine produit 500.000 € d'électricité et 400.000 € de fioul, elle livre 370.000 € d'électricité et 105.000 € de fioul.

2/ On va encore utiliser l'écriture $P - AP = C$, avec une différence.

À la question précédente, P est connue et on cherche C.

Ici c'est le contraire, la matrice de consommation finale C = $\begin{pmatrix} 600.000 \\ 250.000 \end{pmatrix}$ est connue et on cherche P.

On va résoudre P - AP = C où P est l'inconnue.

P = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la matrice de production où *x* est la quantité d'électricité (en euros) à produire et *y* la quantité de fioul (en euros) à produire.

A = $\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}20 \\ 0{,}55 & 0{,}05 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation intermédiaire.

Il ne reste plus qu'à résoudre : $P - A\,P = C$

$\Leftrightarrow\ I_2\,P - A\,P = C$

$\Leftrightarrow\ (I_2 - A)\,P = C$

$\Leftrightarrow\ P = (I_2 - A)^{-1}\,C.$

On trouve P = $\begin{pmatrix} 832.215 \\ 744.966 \end{pmatrix}$.

<u>Pour livrer 600 000 € d'électricité et 250 000 € de fioul, il faut produire 832.215 € d'électricité et 744.966 € de fioul.</u>

Rappel: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité.

$I_2\,X = X$ quelle que soit la matrice X, pourvu que X soit une matrice à 2 lignes.

<u>Vérifions</u> : pour produire 832.215 € d'électricité et 744.966 € de fioul,

on livre 832.215 – 0,10 × 832.215 – 0,20 × 744.966 = 600.000,30 € d'électricité

et 744.966 – 0,55 × 832.215 – 0,05 × 744.966 = 249.999,45 € de fioul.

C'est bien ce qu'il faut trouver.

Cette vérification peut aussi se faire par un calcul matriciel :

$\begin{pmatrix} 832.215 \\ 744.966 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}20 \\ 0{,}55 & 0{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 832.215 \\ 744.966 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600.000 \\ 250.000 \end{pmatrix}$,

C'est bien ce qu'il faut trouver.

Exercice tiré du Indice N° 102 page 28

Pour produire des biens X, Y et Z, on consomme des biens X, Y et Z.

		Production	X	Y	Z
Consommation	X		0,3	0,4	0,1
	Y		0,5	0,2	0,6
	Z		0,1	0,3	0,1

Par exemple, pour produire une unité de X, on consomme 0,3 unité de X, 0,5 unité de Y et 0,1 unité de Z.

1/ Si l'on produit 20 unités de X, 28 de Y et 18 de Z, combien livrera-t-on de X, de Y et de Z ?

2/ La demande est 11 unités de X, 20 de Y et 42 de Z.

Combien doit-on produire de X, de Y et de Z pour satisfaire cette demande ?

1/ P = $\begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 18 \end{pmatrix}$ est la matrice de production.

A = $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation intermédiaire.

La matrice de consommation finale est C = P – AP = $\begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,6 \\ 5,8 \end{pmatrix}$.

<u>Quand on produit 20 unités de X, 28 de Y et 18 de Z, on livre 1 unité de X, 1,6 unités de Y et 5,8 unités de Z.</u>

2/ On va encore utiliser l'écriture P – A P = C, où P = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la matrice de production.

x, *y* et *z* sont les quantités de X, Y et Z à produire pour satisfaire la demande.

C = $\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 42 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation finale.

A = $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation intermédiaire.

Il ne reste plus qu'à résoudre : $P - A\,P = C$

$$\Leftrightarrow \quad I_3\,P - A\,P = C$$

$$\Leftrightarrow \quad (I_3 - A)\,P = C$$

$$\Leftrightarrow \quad P = (I_3 - A)^{-1}\,C$$

On trouve P = $\begin{pmatrix} 180 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$.

<u>Pour consommer 11 unités de X, 20 de Y et 42 de Z, il faut produire 180 unités de X, 250 de Y et 150 de Z.</u>