D'après Liban 2019

Sur la place du village deux bassins A et B sont alimentés par une réserve d'eau R.
Au départ, chaque bassin contient 100 litres d'eau.

Toutes les heures

- la moitié du bassin A se vide dans la réserve ;
- ensuite les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A;
- ensuite on ajoute 200 litres dans le bassin A et 300 litres dans le bassin B.

À la n^e heure le volume d'eau, en centaines de litres, dans le bassin A est a_n , le volume d'eau dans le bassin B est b_n .

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout naturel n , $U_{n+1} = M U_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et donner sa matrice inverse.

b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Calculer PDP .

d. Montrer par récurrence que, pour tout naturel n , $M^n = PD^nP$.

e. Montrer que, pour tout naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & 3 \times \frac{1}{2^n} - 3 \times \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

4. Pour tout entier n , on définit la matrice $V_n = U_n - X$.

a. Montrer que, pour tout naturel n , $V_{n+1} = M V_n$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout naturel n , $V_n = M^n V_0$.

c. Montrer que, pour tout naturel n , $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times \frac{1}{2^n} + 9 \times \frac{1}{2^{2n}} + 10 \\ -3 \times \frac{1}{2^{2n}} + 4 \end{pmatrix}$.

5. a. Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Donner sa limite.

b. Donner la limite de la suite (a_n) .

c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des bassins A et B qui permettra d'éviter tout débordement.

Corrigé

1. Montrer que, pour tout naturel n , $U_{n+1} = M U_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'après l'énoncé, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n + 2$ et $b_{n+1} = \frac{1}{4} b_n + 3$.

$$\begin{aligned} M U_n + C &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n \\ \frac{1}{4} b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n + 2 \\ \frac{1}{4} b_n + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1}. \end{aligned}$$

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et donner sa matrice inverse.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I \text{ donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = P.$$

b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$D = PMP = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{2} \\ 0 & \dots & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

c. Calculer PDP .

$$PDP = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = M.$$

d. Montrer par récurrence que, pour tout naturel n , $M^n = PD^nP$.

Initialisation : $M = PDP$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que $M^n = PD^nP$.

$M^{n+1} = M M^n = PDP PD^nP = PDID^nP = PDD^nP = PD^{n+1}P$ donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

Ce qui achève la récurrence.

e. Montrer que, pour tout naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & 3 \times \frac{1}{2^n} - 3 \times \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}$.

$$D \text{ est une matrice diagonale donc } D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

$$M^n = P D^n P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & \dots & -\frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 3 \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & 3 \times \frac{1}{2^n} - 3 \times \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

$$MX + C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = X.$$

4. Pour tout entier n , on définit la matrice $V_n = U_n - X$.

a. Montrer que, pour tout naturel n , $V_{n+1} = M V_n$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - X = M U_n + C - X = M (V_n + X) + C - X = M V_n + (M X + C) - X = M V_n + X - X = M V_n.$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout naturel n , $V_n = M^n V_0$.

Initialisation : on vient de montrer que $V_n = U_n - X$ pour tout n donc $V_1 = U_1 - X$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : supposons que $V_n = M^n V_0$.

$V_{n+1} = M V_n = M M^n V_0 = M^{n+1} V_0$ donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ce qui achève la récurrence.

c. Montrer que, pour tout naturel n , $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times \frac{1}{2^n} + 9 \times \frac{1}{2^{2n}} + 10 \\ -3 \times \frac{1}{2^{2n}} + 4 \end{pmatrix}$.

$$V_0 = U_0 - X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$V_n = U_n - X \text{ donc } U_n = V_n + X = M^n V_0 + X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & 3 \times \frac{1}{2^n} - 3 \times \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & \dots & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -9 \times \frac{1}{2^n} - 9 \times \frac{1}{2^n} + 9 \times \frac{1}{2^{2n}} \\ -3 \times \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \times \frac{1}{2^n} + 9 \times \frac{1}{2^{2n}} + 10 \\ -3 \times \frac{1}{2^{2n}} + 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $b_n = -3 \times \frac{1}{2^{2n}} + 4$.

5. a. Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Donner sa limite.

La suite (c_n) de terme général $-3 \times \frac{1}{2^{2n}}$ est géométrique de premier terme négatif ;

sa raison $\frac{1}{4}$ est comprise entre 0 et 1 donc elle est croissante, majorée par 0 et sa limite est 0.

$b_n = c_n + 4$ donc la suite (b_n) est croissante, majorée par 4 et sa limite est 4.

b. Donner la limite de la suite (a_n) .

$$a_n = -18 \times \frac{1}{2^n} + 9 \times \frac{1}{2^{2n}} + 10.$$

La suite (d_n) de terme général $-18 \times \frac{1}{2^n} + 9 \times \frac{1}{2^{2n}}$ est la somme de deux suites géométriques dont la raison est comprise entre 0 et 1 donc sa limite est 0.

$a_n = d_n + 10$ donc la suite (a_n) a pour limite 10.

c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des bassins A et B qui permettra d'éviter tout débordement.

La suite (a_n) est croissante de limite 10 donc elle est majorée par 10 donc si le bassin A contient 1.000 litres, il ne débordera pas.

De même si le bassin B contient 400 litres, il ne débordera pas.