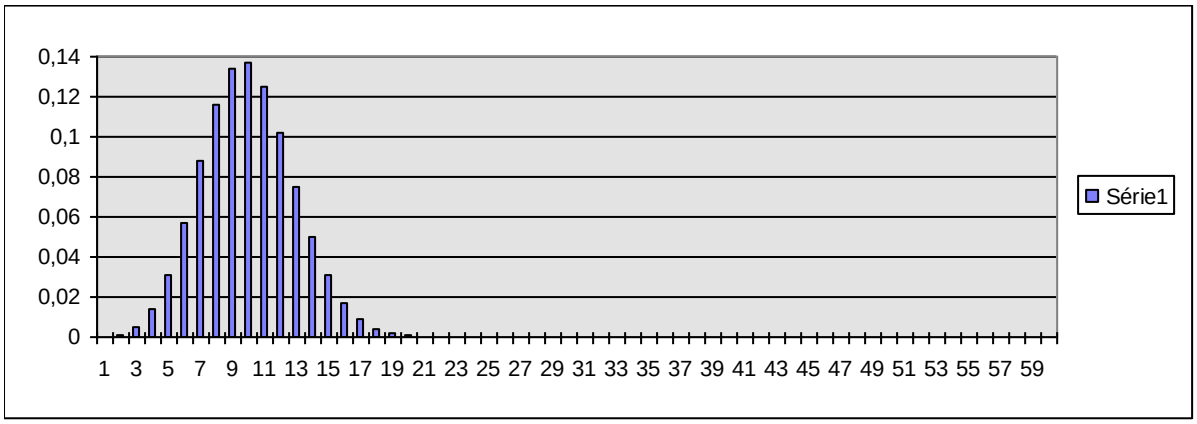
Loi normale

On lance 60 fois un dé normal et on compte le nombre de 6 (on dit que X est la variable aléatoire égale au nombre de 6 sortis lors de ces 60 lancers).

P (X = 5) ≈ 0,03 ; P (X = 10) ≈ 0,13 ; P (X = 22) ≈ 10^{-4} etc.



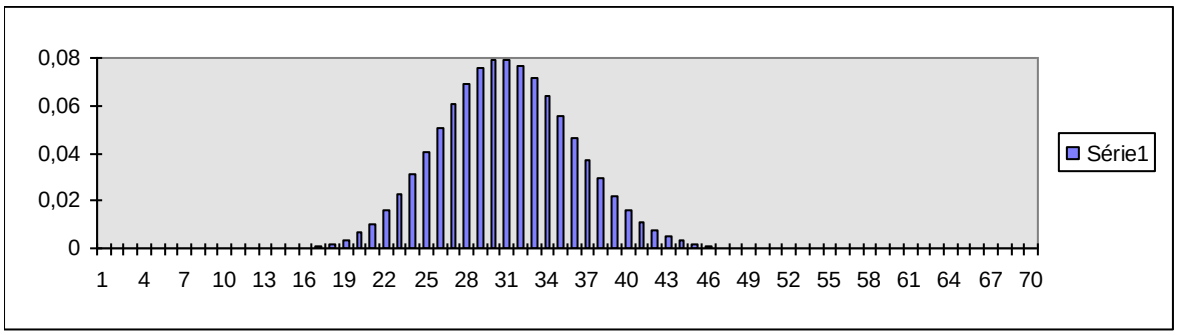
La valeur la plus probable de X est 10. P (X = 10) ≈ 0,137.
Les valeurs proches de 10 ont une probabilité un peu inférieure à P (X = 10).
Les valeurs éloignées de 10 ont une probabilité très faible.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$.

L'espérance de cette loi binomiale est $E(X) = np = 60 \times \frac{1}{6} \approx 10$.

Cela signifie qu'en moyenne, quand on lance 60 dés normaux, on trouve 10 fois le 6.

Voici ce qu'on obtient avec $n = 180$ lancers.



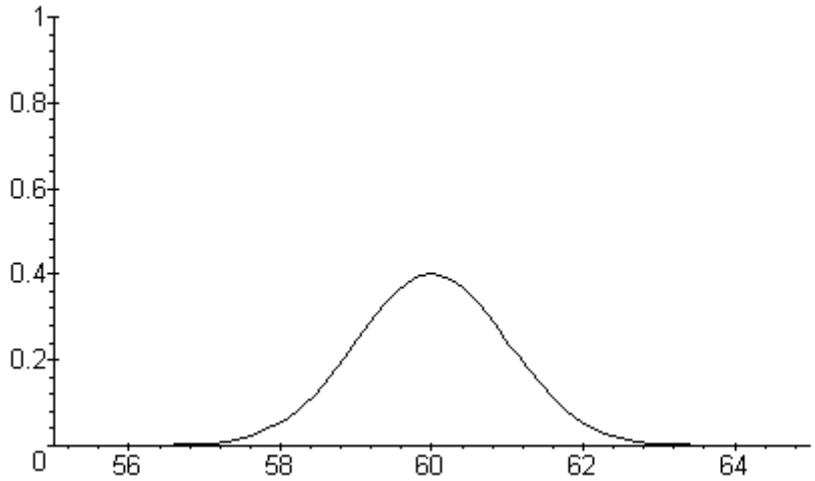
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{1}{6}$.

L'espérance est $E(X) = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30$.

On imagine ce qui se passe quand n augmente. Les points qui sont aux sommets des bâtons sont très proches et on se rapproche d'une courbe en cloche.

Certains phénomènes sont décrits par une telle courbe. On dit qu'ils suivent une loi normale.

L'exemple classique est l'erreur de fabrication.
Une machine doit verser 60 cl dans un récipient mais il peut arriver qu'elle verse un peu plus ou un peu moins.
On s'intéresse à la variable aléatoire égale au volume versé.

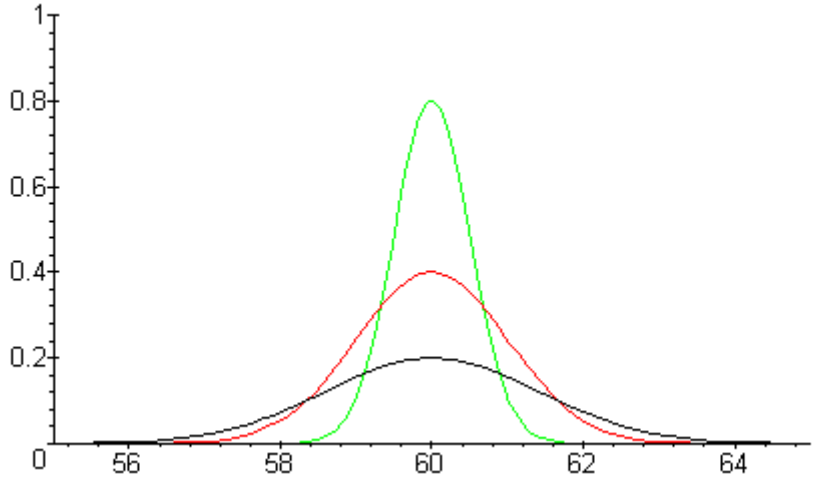


La valeur la plus probable est 60. On dit que c'est l'espérance de la variable aléatoire égale au volume versé.

On note $\mu = 60$.

Si la machine est plus précise, les grosses erreurs sont moins probables et l'on obtient une cloche plus étroite.

Dans le cas contraire, la cloche est plus large.



La différence entre ces trois situations est la dispersion.
La cloche étroite correspond à une petite dispersion.
Habituellement, on décrit la dispersion d'une variable aléatoire par son écart-type.

La plus étroite de ces trois courbes correspond à un écart-type $\sigma = \frac{1}{2}$.
La moins étroite de ces trois courbes correspond à un écart-type $\sigma = 2$.

L'autre courbe correspond à un écart-type $\sigma = 1$.

Une loi normale est entièrement décrite par son espérance et par son écart-type.
Si vous donnez ces renseignements à votre calculette, elle calculera tout ce qu'il vous faut.

Exemple
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 4.
Donner $P (3 \leq X \leq 10)$.
Calculette TI
On cherche dans le menu *Distribution* l'instruction *normalFRép*.
On donne à la calculette tout ce qu'elle demande et on trouve
Calculette Casio
MENU STAT DIST (F5) NORM (F1) Ncd (F2)
Régler Data sur Var (F2)
On donne à la calculette tout ce qu'elle demande,
on descend jusqu'à Exécuter puis CALC (F1) et on trouve

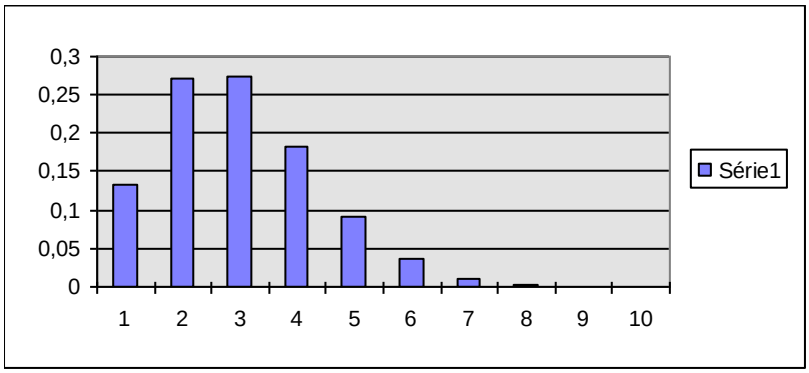
$P (3 \leq X \leq 10) \approx 0{,}5858$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
Rappel : si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors
l'espérance de X est $E (X) = n p$.
l'écart-type de X est $\sigma = \sqrt{npq}$.

Nous avons vu que si n est grand, alors une loi binomiale est proche d'une loi normale.
Oui, mais de quelle loi normale ?
Exemple : on lance 60 fois un dé normal et on compte le nombre de 6.
Le nombre de 6 suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$.
$E (X) = n p = 10$ et $\sigma (X) = \sqrt{npq} \approx 2{,}89$.
Une approximation de la loi binomiale X est la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 2,89.
Voilà, c'est toujours comme ça, il suffit de trouver l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Si *p* est petit, il y a un problème car on n'obtient plus une courbe en cloche symétrique :



On rencontre le même problème si *p* est proche de 1.
On ne peut donc plus approcher une loi binomiale par une loi normale.
On utilise pour cela une loi de Poisson de même espérance.
Une loi de Poisson dépend d'un unique paramètre $\lambda > 0$.
L'espérance d'une loi de Poisson est λ.
Pour approcher la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, il suffit de choisir la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p$ (voir les détails dans le fichier « Loi de Poisson »).

Vous donnez ce paramètre λ à la calculette et elle vous donne des résultats comme $P (X \leq 2)$, avec le second choix que vous propose la calculette (FRép).

Exemple : la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}05$ peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre 10.
Avec la loi binomiale, on trouve $P (X \leq 2) = 0{,}0028$.
Avec la loi de Poisson, on trouve $P (X \leq 2) = 0{,}0023$.
Vérifiez.

Il est délicat de savoir quand une loi binomiale peut être approchée par une loi normale ou par une loi de Poisson. Disons deux choses :

- on choisit une loi de Poisson et non une loi normale quand *p* est petit, disons, $p \leq 0{,}1$.
- pas de panique, dans les sujets de BTS, ce choix délicat est tranché par l'auteur du problème.

Lois discrètes, lois à densité

Une loi binomiale donne la probabilité d'obtenir tel ou tel nombre de succès. On ne demandera jamais à une loi binomiale de donner la probabilité d'avoir 2,7 succès. Une loi binomiale ne donne donc que la probabilité d'obtenir un nombre entier.

Une telle loi est une loi discrète.

Une loi discrète est représentée par un histogramme : la hauteur de chaque rectangle indique la probabilité d'obtenir un nombre entier.

Pour une loi discrète, la calculette donne des renseignements comme $P (X = 2)$ ou $P (X \leq 2)$.

Une loi normale est représentée par une courbe. On parle de loi à densité.

Pour une loi à densité, la calculette donne des renseignements comme $P (X \leq 10)$ ou $P (1 \leq X \leq 10)$.

Sur le graphique, ces probabilités sont des aires comprises entre l'axe horizontal et la courbe, on les calcule grâce à des intégrales.

Pour une loi à densité, la probabilité d'obtenir un seul nombre est 0.

Pour n'importe quelle loi à densité, $P (X = 2) = 0$.

Une loi uniforme est aussi une loi à densité.

Intervalle de fluctuation

Vérifiez à la calculette qu'avec n'importe quelle loi normale,

$P (\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$.

$P (\mu - 2 \sigma \leq X \leq \mu + 2 \sigma) \approx 0,95$.

$P (\mu - 3 \sigma \leq X \leq \mu + 3 \sigma) \approx 0,997$.

La probabilité que X soit éloignée de son espérance de plus de trois écarts-types est très faible : environ 0,3 %.