Opérations sur les matrices

Dimension d'une matrice

Cette matrice $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ a 2 lignes et 3 colonnes.

On parle de matrice 2×3.

$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Quand il y a autant de lignes que de colonnes, on parle de matrice carrée.

$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Cette année, on ne s'intéressera qu'aux matrices carrées et aux matrices colonnes.

Somme de deux matrices

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ On dit que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.

Pour le calcul matriciel, la matrice nulle joue le même rôle que le nombre 0 pour le calcul numérique.

Rappel : si la somme de deux nombres est 0, alors on dit que ces deux nombres sont opposés.

- 3 et 3 sont opposés car – 3 + 3 = 0.

Définition : deux matrices sont opposées si leur somme est la matrice nulle.

L'opposé de la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ est la matrice – A = $\begin{pmatrix} -2 & 10 & -8 \\ 0 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Produit d'un nombre par une matrice

$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \\ 10 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices

On peut faire le produit d'une matrice carrée et d'une matrice colonne, à condition qu'elles aient le même nombre de lignes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1 + 4\times2 \\ 5\times1 + 6\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1 + 4\times2 + 2\times6 \\ 5\times1 + 6\times2 + 3\times6 \\ 7\times1 + 8\times2 + 9\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 35 \\ 77 \end{pmatrix}$$

Attention, si A est une matrice carrée et B une matrice colonne, on peut faire le produit AB (si elles ont le même nombre de lignes) mais pas le produit BA.

L'opération $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ne donne pas de résultat.

On peut faire le produit de deux matrices carrées de même ordre :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 + 3\times5 & 2\times(-2) + 3\times(-3) \\ -5\times1 + 1\times5 & -5\times(-2) + 1\times(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Attention : en général, A B ≠ B A.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times2 + (-2)\times(-5) & 1\times3 + (-2)\times1 \\ 5\times2 + (-3)\times(-5) & 5\times3 + (-3)\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 25 & 12 \end{pmatrix}.$$

Matrice identité

On dit que 1 est neutre pour la multiplication car $1 \times x = x$ pour tout nombre x.

La matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ joue le même rôle pour le produit des matrices, on l'appelle matrice identité.

Quelle que soit la matrice carrée d'ordre 2, $A \times I_2 = A$ et $\times I_2 \times A = A$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est la même chose pour $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tous les ordres supérieurs à 3.

Inverse d'une matrice carrée

Rappel : si le produit de deux nombres est 1, alors on dit que ces deux nombres sont inverses.

3 et $\frac{1}{3}$ sont inverses car $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

$\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$ sont inverses car $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$.

Définition : si le produit de deux matrices carrées est la matrice identité, alors on dit que ces deux matrices sont inverses.

On écrit que si A B = I, alors $A^{-1} = B$. Dans ce cas, on a aussi B A = I et $B^{-1} = A$.

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sont inverses car $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont inverses car leur produit est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De même, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont inverses.

De même, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -17 & 26 & -15 \\ 19 & -29 & 17 \\ -8 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ sont inverses.

Vérifiez vous-mêmes, cela vous fera un excellent exercice de calcul.

Avec la calculette, on obtient l'inverse d'une matrice en tapant A^{-1}.

Calculer à la main l'inverse d'une matrice carrée n'est pas au programme de terminale.

Certaines matrices carrées n'ont pas d'inverse

Quand on multiplie 0 par n'importe quel nombre, on ne trouve pas 1. Le nombre 0 n'a donc pas d'inverse.

Il est clair qu'en multipliant la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par n'importe quelle matrice carrée, on ne trouvera pas $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a donc pas d'inverse.

Beaucoup d'autres matrices n'ont pas d'inverse, par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Quand on demande à la calculette l'inverse d'une matrice qui n'a pas d'inverse, on obtient un message d'erreur.

Puissances d'une matrice carrée

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 36 \\ 45 & 56 \end{pmatrix}$ est le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

On peut parler aussi du cube ou de n'importe quelle puissance naturelle d'une matrice carrée.

Si M est une matrice carrée, on peut écrire que $M^0 = I$.

Exemple d'utilisation d'une matrice de passage

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculer à la main D^2 ; D^3 et D^4.

On trouve très facilement que $D^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

De même $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 216 & 0 \\ 0 & 0 & -64 \end{pmatrix}$ et $D^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1296 & 0 \\ 0 & 0 & 256 \end{pmatrix}$ etc.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -7 & 9 & 3 \\ 10 & -10 & -4 \end{pmatrix}$

Pour calculer A^2 ; A^3 et A^4 c'est plus difficile. On utilise donc une matrice de passage.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice vérifie $A = P^{-1} D P$

donc $A^2 = (P^{-1} D P) (P^{-1} D P)$

$= P^{-1} D I D P$ car $P P^{-1} = I$

$= P^{-1} D^2 P$.

De même $A^3 = P^{-1} D P P^{-1} D P P^{-1} D P = P^{-1} D I D I D P = P^{-1} D^3 P$.

De même $A^4 = P^{-1} D^4 P$ etc.

Comme D^4 est facile à calculer, A^4 s'obtient avec moins de calculs qu'avec la méthode directe.

Bon, d'accord, le gain n'est pas énorme et de toute façon la calculette travaille très bien selon les deux méthodes. C'est surtout utile pour des calculs de limites.

Il s'agit quand même d'une méthode classique que l'on rencontre dans les annales.