

Résolution d'un problème linéaire à plusieurs inconnues avec des matrices

Le problème avec une seule inconnue

Pour faire un gâteau A, on utilise 500 g de farine.

Pour fabriquer des gâteaux A, une pâtisserie a utilisé 10 kg de farine.

Combien a-t-elle fait de gâteaux A ?

La consommation unitaire est $u = 500$.

La consommation totale est $t = 10.000$.

La production est p .

Le problème conduit à $u \times p = t \Leftrightarrow 500 p = 10.000 \Leftrightarrow p = \frac{10.000}{500} \Leftrightarrow p = 20$.

Finalement, la pâtisserie a fait 20 gâteaux A.

Le problème avec deux inconnues

Pour faire un gâteau A, on utilise 500 g de farine et 200 g de beurre.

Pour faire un gâteau B, on utilise 500 g de farine et 375 g de beurre.

Pour fabriquer des gâteaux A et des gâteaux B, une pâtisserie a utilisé 40 kg de farine et 23,525 kg de sucre.

Combien a-t-elle fait de gâteau de chaque type ?

Avec un système d'équations

Le problème conduit au système

$$500 a + 500 b = 40.000$$

$$200 a + 375 b = 23.525$$

On résout et on trouve que la pâtisserie a fait 27 gâteaux A et 43 gâteaux B.

On exprime ce système avec des matrices : $\begin{pmatrix} 500a + 500b \\ 200a + 375b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.000 \\ 23.525 \end{pmatrix}$

ou alors $\begin{pmatrix} 500 & 400 \\ 200 & 375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.000 \\ 23.525 \end{pmatrix}$

Avec des matrices

Le problème conduit à $U \times P = T$

où $U = \begin{pmatrix} 500 & 500 \\ 200 & 375 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation unitaire,

$T = \begin{pmatrix} 40.000 \\ 23.525 \end{pmatrix}$ est la matrice de consommation totale et

$P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la matrice de production (a et b sont le nombre de gâteaux A et B fabriqués).

Il ne reste plus qu'à résoudre :

$$U \times P = T \quad \Leftrightarrow \quad P = U^{-1} T$$

donc $P = \begin{pmatrix} 27 \\ 43 \end{pmatrix}$

Finalement, la pâtisserie a fait 27 gâteaux A et 43 gâteaux B.

Remarque

La matrice de consommation unitaire $U = \begin{pmatrix} 500 & 500 \\ 200 & 375 \end{pmatrix}$ doit être écrite comme indiqué et pas autrement.

Le problème avec quatre inconnues

Pour faire un gâteau A, on utilise 500 g de farine, 200 g de beurre, 2 œufs et 40 g de sucre.

Pour faire un gâteau B, on utilise 500 g de farine, 375 g de beurre, 5 œufs et pas de sucre.

Pour faire un gâteau C, on utilise 250 g de farine, 150 g de beurre, 3 œufs et 125 g de sucre.

Pour faire un gâteau D, on utilise 400 g de farine, 200 g de beurre, 4 œufs et 25 g de sucre.

Une pâtisserie qui ne fabrique que les gâteaux A, B, C et D a utilisé 400 kg de farine, 225 kg de beurre, 300 douzaines d'œufs et 64,250 kg de sucre.

Combien a-t-elle fait de gâteau de chaque type ?

On justifiera le calcul avec un calcul matriciel.

Utilisons

$$\text{la matrice de consommation unitaire : } U = \begin{pmatrix} 500 & 500 & 250 & 400 \\ 200 & 375 & 150 & 200 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 40 & 0 & 125 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\text{la matrice de consommation totale : } T = \begin{pmatrix} 400.000 \\ 225.000 \\ 3.600 \\ 64.250 \end{pmatrix}$$

et la matrice de production : $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où a , b , c et d sont le nombre de gâteaux A, B, C et D fabriqués.

Ce problème, comme le précédent conduit à $U \times P = T \Leftrightarrow P = U^{-1} T$

$$\text{donc } P = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 400 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Finalement, la pâtisserie a fait 200 gâteaux A, 200 gâteaux B, 400 gâteaux C et 250 gâteaux D.