

Résoudre un système d'équations avec des matrices

On dit que le couple $(1; 2)$ est une solution du système
$$\begin{cases} 4x - 5y = -6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

car si l'on remplace x par 1 et y par 2, alors les deux égalités du système sont vraies.

En effet $4 \times 1 - 5 \times 2 = -6$ et car $3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$.

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le produit de ces deux matrices est $A X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 5y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$.

Le système donné plus haut peut donc s'écrire $A X = B$ où B est la matrice $\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

C'est une équation matricielle où l'inconnue est la matrice X .

On résout cette équation comme d'habitude, en faisant la même opération à gauche et à droite du =

$$A X = B$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B$$

on multiplie à gauche par A^{-1}

attention, en multipliant à droite, on écrirait $A X A^{-1} = B A^{-1}$

qui ne nous intéresse pas.

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

car $A^{-1} A$ est la matrice identité.

On demande à la calculatrice de donner $A^{-1} B$ et on trouve $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On peut conclure que $(1; 2)$ est une solution du système
$$\begin{cases} 4x - 5y = -6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

et que $S = \{(1; 2)\}$.

Un autre exemple

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ 4x + y - 3z = 16 \\ -7x + 5y + z = -12 \end{cases}$$

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$A X = B$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

On demande à la calculatrice de donner $A^{-1} B$ et on trouve $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S = \{ (3; 4; 1) \}$$