

Dérivée et primitives des fonctions trigonométriques

Pour trouver des primitives, le plus simple est de lire à l'envers un tableau de dérivées..

f' est la dérivée de f , F est une primitive de f .

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$

On en déduit

$f(x)$	$F(x)$
$2 \cos x$ $- 8 \cos x$ $-\cos x$	$- 2 \sin x$ $8 \sin x$ $\sin x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$ $\sin x$ $-\cos x$ $-\sin x$	$-\sin x$ $\cos x$ $\sin x$ $-\cos x$

On en déduit

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$ $\sin x$	$\sin x$ $-\cos x$

On en déduit

$f(x)$	$F(x)$
$2 \cos x$ $- 3 \cos x$	$2 \sin x$ $- 3 \sin x$

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x + \sin x$ $5 \cos x - 2 \sin x$ $\frac{1}{2} \cos x$	$\sin x - \cos x$ $5 \sin x + 2 \cos x$ $\frac{1}{2} \sin x$

La dérivée de $x \mapsto \sin 2x$ est $x \mapsto 2 \cos 2x$.

La dérivée de $x \mapsto \cos(5x + 1)$ est $x \mapsto -5 \cos(5x + 1)$.

Cela aussi permet de donner des primitives :

$f(x)$	$F(x)$
$\cos 2x$ $-\frac{1}{2} \cos x$ $\sin 3x$ $\frac{1}{3} \sin x$	$- 2 \sin 2x$ $\sin 2x$ $3 \cos 3x$ $\cos 3x$

$f(x)$	$F(x)$
$\cos 2x$ $\sin 3x$ $1 - \cos 2x$	$\frac{1}{2} \sin x$ $-\frac{1}{3} \sin x$ $x - \frac{1}{2} \sin 2x$

On voit ainsi qu'une primitive de $f: x \mapsto \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$

est $F: x \mapsto \frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) = \frac{1}{4} (2x - \sin 2x)$.

C'est-à-dire qu'une primitive de $f: x \mapsto \frac{1 - \cos 2x}{2}$ est $F: x \mapsto \frac{2x - \sin 2x}{4}$.

Utilisons maintenant les formules de linéarisation :

Comme $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$,

une primitive de $f: x \mapsto \sin^2 x$ est $F: x \mapsto \frac{2x - \sin 2x}{4}$.

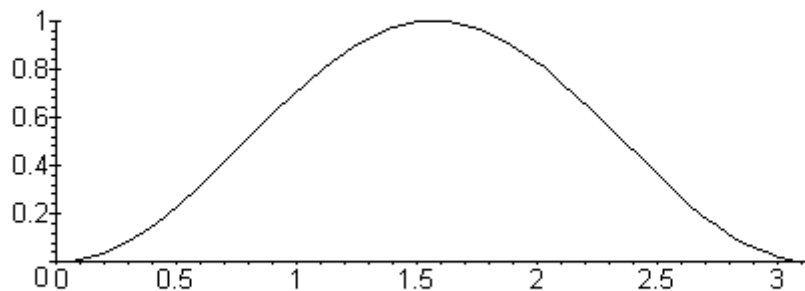
Comme $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, on démontre de même que

une primitive de $f: x \mapsto \cos^2 x$ est $F: x \mapsto \frac{2x + \sin 2x}{4}$.

Cela permet d'intégrer sur $[0; \pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi - \sin 2\pi}{4} - \frac{0 - \sin 0}{4} = \frac{2\pi - 0}{4} - \frac{0 - 0}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

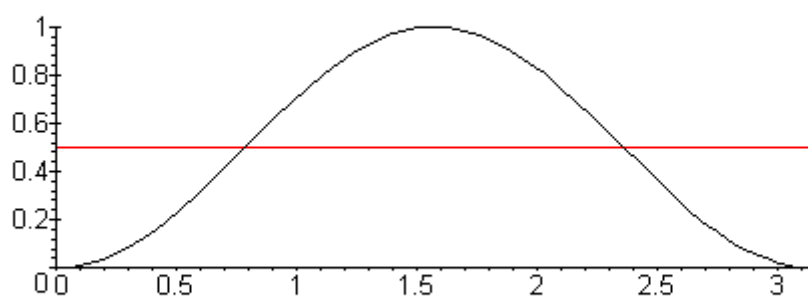
C'est l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe :



Cherchons la valeur moyenne de $f: x \mapsto \sin^2 x$ sur $[0; \pi]$.

Comme on a intégré sur un intervalle d'amplitude π ,

la valeur moyenne de $f: x \mapsto \sin^2 x$ est $\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$.



Pour les valeurs de x comprises entre 0 et π ,
l'aire sous la courbe est égale à l'aire sous la droite.