Le théorème de Gauss

Idée du théorème de Gauss :

4 divise le produit $5 \times 12 = 60$.

4 ne divise pas 5 donc 4 divise 12.

4 divise le produit, 4 ne divise pas le premier terme du produit donc 4 divise l'autre.

Ça ne marche pas toujours :

4 divise le produit $6 \times 10 = 60$.

4 ne divise ni 6 ni 10.

4 divise le produit mais 4 ne divise aucun des deux termes du produit.

Pourquoi ça marche avec $5 \times 12 = 60$ et pas avec $6 \times 10 = 60$?

5 et 12 sont premiers entre eux.

6 et 10 ne sont pas premiers entre eux.

Il faut donc ajouter une condition :

4 divise le produit $5 \times 12 = 60$.

4 ne divise pas 5

5 et 12 sont premiers entre eux

donc 4 divise 12.

Avec la décomposition en facteurs premiers on voit mieux ce qui se passe :

$$60 = 5 \times 12 = (5) \times (2 \times 2 \times 3)$$

On voit bien que 4 divise 12 et pas 5.

On voit bien aussi que 5 et 12 n'ont pas de facteurs commun, sauf 1, donc que 5 et 12 sont premiers entre eux.

$$60 = 6 \times 10 = (2 \times 3) \times (2 \times 5)$$

On voit bien que 4 ne divise ni 5 ni 12.

On voit bien aussi que 2 est facteur commun de 5 et de 12 donc que 5 et 12 ne sont pas premiers entre eux.

Maintenant on peut formuler correctement :

Théorème de Gauss : a , b et c sont des entiers non nuls.

Si a divise bc , et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

Démonstration : a divise bc donc il existe un entier k tel que $bc = ka$.

a et b sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

On multiplie par c et on trouve $c = acu + bcv = acu + kav = a (cu + kv)$

donc a divise c .

Cas particulier : si p est premier, si b et c sont des entiers non nuls et si p divise bc , alors p divise b ou p divise c .