Un problème de bac sur les suites géométriques

Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus. L'évolution du nombre de bactéries, en fonction du temps, est étudiée dans un laboratoire où travaillent deux techniciens.

Partie A

L'un des deux techniciens émet l'hypothèse que cette population augmente de 23 % toutes les heures. On modélise l'évolution du nombre de bactéries par la suit (u_n).

1. Donner la valeur de u_0. Calculer u_1 et u_2.

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et donner sa raison.

3. a. Exprimer u_n en fonction de n.

   b. Calculer u_7. Que représente ce nombre ?

4. Au bout de combien d'heures, selon l'hypothèse de ce technicien, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

Partie B

L'autre technicien pense que l'augmentation est de p % toutes les heures ($p \neq 23$).

Pour déterminer au bout de combien d'heures, selon son hypothèse, le nombre de bactéries dépasse 500 000, il a réalisé l'algorithme suivant

Algorithme	Résultats de l'algorithme	
Début	N = 0	U = 50 000
Lire *p*		
N prend la valeur 0	N = 1	U = 63 500
U prend la valeur 50 000		
Tant que U < …		
N prend la valeur …	N = 2	U = 80 645
U prend la valeur …	N = 3	U = 102 673,15

Afficher la valeur de N

Afficher la valeur de U

Fin du tant que

Afficher N

Afficher U

Fin

1. En utilisant les premiers résultats affichés par l'algorithme, déterminer la valeur de p.

2. Recopier et compléter la colonne de gauche de l'algorithme.

3. Au bout de combien d'heures, selon cette hypothèse, le nombre de bactéries dépassera 500 000 ?

Correction

Partie A

1. $u_0 = 50\,000$.

La population augmente de 23 % toutes les heures donc $u_1 = 50\,000 \times 1{,}23 = 61\,500$.

De même $u_2 = u_1 \times 1{,}23 = 75\,645$.

2. a. La population augmente de 23 % toutes les heures donc $u_{n+1} = u_n \times 1{,}23$.

b. Pour passer d'un terme au suivant on multiplie par 1,23 donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,23.

3. a. (u_n) est une suite géométrique de raison 1,23 donc $u_n = u_0 \times 1{,}23^n$ donc $u_n = 50\,000 \times 1{,}23^n$.

b. On en déduit que $u_7 = 50\,000 \times 1{,}23^7 = 212\,964$.

4. Grâce à la calculette on trouve que $u_{11} = 487\,446$ et que $u_{12} = 599\,558$. La population dépassera donc 500 000 pendant la 12^{e} heure.

Partie B

1. Pour passer de $u_0 = 50\,000$ à $u_1 = 63\,500$, on multiplie par $\frac{63.500}{50.000} = 1{,}27$ donc $p = 27$.

2. **Tant que** U < 50 000

N prend la valeur N + 1

U prend la valeur U $\times$ 1,27

3. Grâce à la calculette on trouve que u_9 = 429 738 et que u_{10} = 545 767. La population dépassera donc 500 000 pendant la 10^{e} heure.