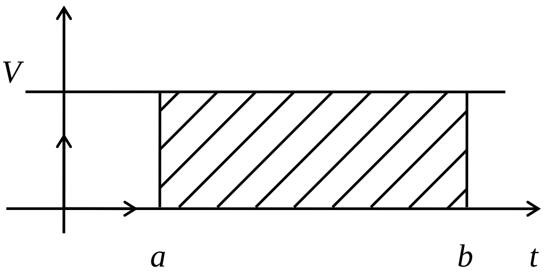
Les intégrales en physique

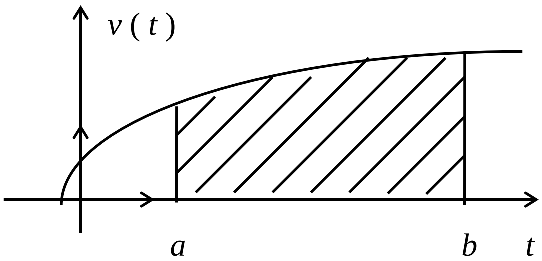
Une première voiture se déplace à une vitesse constante V entre les instants a et b.



Entre les instants a et b cette voiture parcourt une distance égale à $V \times (b - a)$.
La surface hachurée est un rectangle de longueur $b - a$ et de largeur V.
L'aire de la surface hachurée est donc $V \times (b - a)$.

La distance parcourue est donc égale à l'aire de la surface hachurée.

Une autre voiture se déplace avec une vitesse variable $v (t)$ entre les instants a et b.

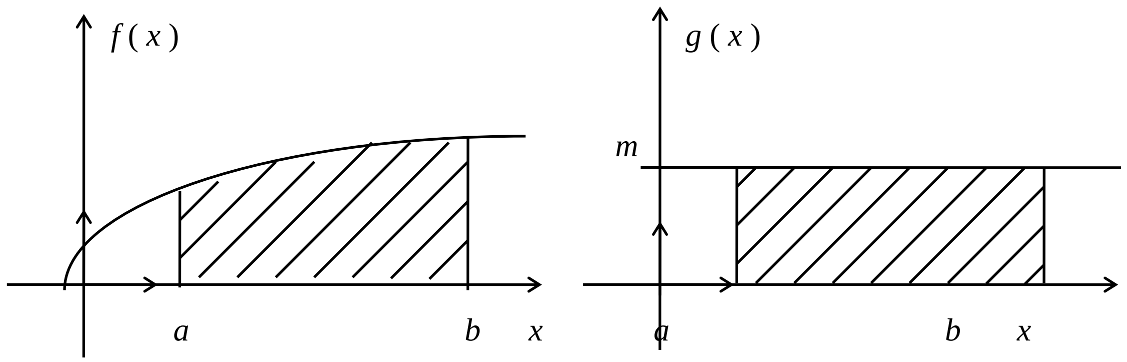


De même, on admettra que la distance parcourue par cette voiture entre les instants a et b est égale à l'aire de la surface hachurée.

Cette distance est l'intégrale de la fonction puissance entre a et b : $\int_a^b v (t) \, dt$.

Les intégrales permettent de calculer sur des grandeurs variables.

Valeur moyenne



Il existe une valeur *m* telle que les deux aires hachurées sont égales.
On dit que *m* est la valeur moyenne de la fonction *f* sur [*a* ; *b*].
Comment calculer cette valeur moyenne ?
Il suffit d'écrire que ces aires sont égales.

<u>L'aire de droite</u> est l'aire d'un rectangle de longueur *b* - *a* et de largeur *m*.
Cette aire est donc $m \times (b - a)$.

On peut aussi calculer une intégrale

$$\int_a^b g (x) \, dx = \int_a^b m \, dx = [m x]_a^b = m b - m a = m \times (b - a).$$

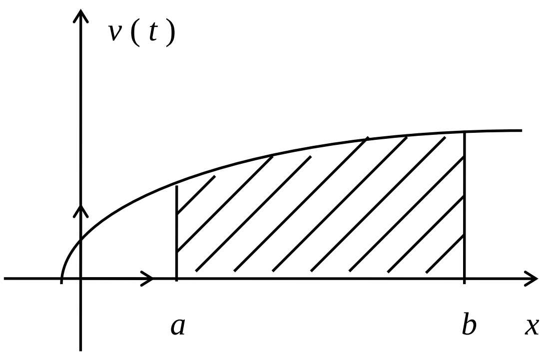
<u>L'aire de gauche</u> est $\int_a^b f (x) \, dx$.

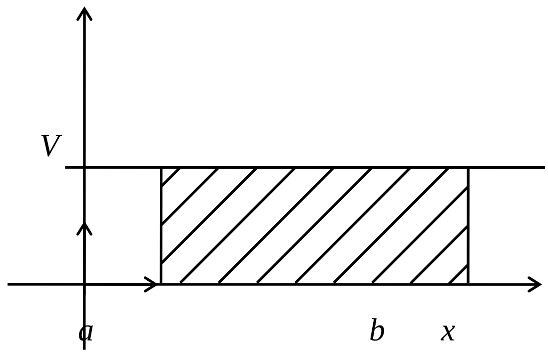
Les deux aires hachurées sont égales donc $\int_a^b f (x) \, dx = m \times (b - a)$

donc $m = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f (x) \, dx$.

<u>Un exemple : la vitesse moyenne</u>

Une voiture se déplace avec une vitesse variable $v\,(\,t\,)$ entre les instants a et b.





Il existe une vitesse V telle que, en se déplaçant à vitesse constant à cette vitesse, la distance parcourue entre les instants a et b soit la même.

Cette vitesse moyenne est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b v\,(\,t\,)\,\mathrm{d}t$.

<u>Un autre exemple</u>

La valeur moyenne de x^2 sur [0 ; 1] est $\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1 \times \left[\,\dfrac{x^3}{3}\,\right]_0^1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{0}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Les deux surfaces hachurées ont donc la même aire.